Hatber

Castles of Europe

Տետրակ

copybook

80 A5 sheets
class C
made in Russia

Դետերմինանտներ (որոշիչներ)

II կարգի դետերմինանտ և նրա հատկությունները

Սահմանում։ 4 տարրից կազմված $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21} \end{pmatrix}$ աղյուսակը կոչում ենք քառակուսի մատրից, որն ունի 2 տող և 2 սյուն։ Ձախ վերևից աջ ներքև գումարը կոչում ենք 2 ինդեքսով, որոնցից $\overline{I}$-ը ցույց է տալիս տողի համարը, իսկ $\overline{II}$-ը սյան։

(1) քառակուսի մատրիցին համապատասխանող $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ թիվը կոչում ենք $\overline{II}$ կարգի դետերմինանտ և գրվում

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$ կերպով։

որտեղ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\text{։} \quad \text{Օրինակ} \quad \begin{vmatrix} 5 & \frac{1}{4} \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot 2 - 8\cdot\frac{1}{4} = 8$$

Հատկությունները.

1. Երբ որոշչի որևէ տողի(սյան) տարրերը զրո են, ապա այն $= 0$։
2. Երբ որոշչի որևէ 2 տողի (սյան) տարրերը համեմատական են, ապա այն $= 0$։
3. Դետերմինանտի տողերը (սյուները) ~~փոխարինելիս~~ սյուներով (տողերով) փոխարինելիս դետերմինանտի արժեքը չի փոխվում։

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{1} \end{vmatrix}$$

4. Դետերմինանտի տողերի (սյուների) տեղերը փոխելիս դետերմինանտը փոխում է նշանը։

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$$

5. Երբ դետերմինանտի որևէ տողի (սյան) տարրերն ունեն ընդհանուր արտադրիչ, ապա այն կարելի է դուրս բերել դետերմինանտի նշանից դուրս։

$$\begin{vmatrix} da_{11} & da_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = d \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{22} \end{vmatrix}$$

6. Դետերմինանտի որևէ տողի (սյան) տարրերին նույն թվով ուրիշ տողի (սյան) տարրերը 0-ից տարբեր ընդհանուր արտադրիչով բազմապատկելիս և գումարելիս, դետերմինանտի արժեքը չի փոխվի։

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+da_{12} & a_{12} \\ a_{11}+da_{22} & a_{12} \end{vmatrix} \qquad d \neq 0$$

7. Եթե determinant-ի որևէ տողի կամ սյակի յուրաքանչյուր տարրը հանրահաշվական գումար է 2 գումարելիից, ապա այդ determinant-ը հավասար է 2 determinant-ների գումարին, որոնցից I-ի համապատասխան տողը (սյակը) պարունակում է գումարելիներից առաջինը, II-ինը՝ երկրորդը:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+c_{12} \\ a_{21} & a_{22}+c_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & c_{12} \\ a_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$$

III կարգի determinant և նրա հաշվարկման եղանակները

Ունենանք: 3 տարրերից կազմված հերկյալ աղյուսակը կոչենք 3 III կարգի քառակուսի մատրից.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (1)$$

(1) III կարգի քառակուսի մատրից համապատասխան թիվը.

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

կոչենք 3 III կարգի determinant և նշանակենք

$$(2) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

որոշում ենք հետևյալ կերպ.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

(սահմանման եղանակ)

Օրինակ $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot4\cdot5 + 3(-1)\cdot1 + 3\cdot2\cdot2 - 2\cdot4\cdot1 - (-1)\cdot2\cdot2 - 3\cdot3\cdot5 = 0$

Հաշվարկման եղանակներ

$$\begin{array}{c|ccc|c} + & 2 & 3 & 1 & - \\ + & 3 & 4 & 2 & - \\ + & 2 & -1 & 5 & - \\ & 2 & 3 & 1 & \\ & 3 & 4 & 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & 2 & -1 \\ - & - & - & & \end{array}$$

Հատկություններ.

Ցանկացած քառակուսի մատրիցի որոշիչի 1-ից հատկությունները նույնությամբ տեղափոխվում են հատկությունների համար.

Գրենք ևս 2 հատկություն.

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ Երբ ջնջենք մի տողի որևէ տարր և որևէ սյունակ մնացած տեղերում կազմված որոշիչին կանվանենք ջնջված տարրի, ջնջված սյան հատման կետում գրված տարրի մինոր:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Օրինակ $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & \boxed{8} \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = M_{33}$

Սահմանում: a_{ij} տարրի $(i=1;2;3 \; ; \; j=1;2;3)$ M_{ij} մինորը վերցրած $(-1)^{i+j}$ նշանով կոչվում է a_{ij} տարրի հանրահաշվական լրացում և գրվում.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Օրինակ $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & \boxed{4} & 5 \end{vmatrix}$ $A_{32} = 2$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}\cdot a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}\cdot a_{32} - a_{31}a_{22}) =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} =$$

$$= a_{11}\underbrace{(-1)^{1+1}M_{11}}_{A_{11}} + a_{12}\underbrace{(-1)^{1+2}M_{12}}_{A_{12}} + a_{13}\underbrace{(-1)^{1+3}M_{13}}_{A_{13}} \text{ և}$$

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Դ. 2: $\Delta = 5$ որևէ տողի կամ սյան տարրերի և նրանց հանրահաշվական լրացումների արտադրությունների գումարն է:

Օրինակ

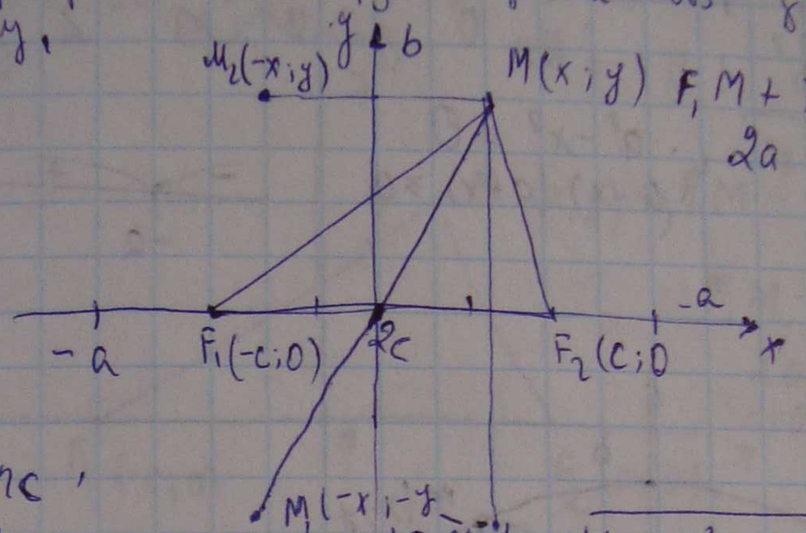
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -20 + 11 = -9$$

4.9. A-ի տրված որևէ տող (սյուն) տարրերը B այլ տող (սյուն) տարրերով հանելուց ստացվում է նույն որոշիչը և գումարելուց՝ նորից 0:

$$a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} = 0$$

Ստորև տրված

2. Սահմ.: Հարթության այն կետերի բազմությունը, որոնց համար հարթության տրված 2 կետերից (կիզակետեր - ֆոկուսներ) հեռավորությունների գումարը հաստատուն մեծություն է և մեծ է կիզակետերի հեռավորությունից,



F_1F_2 կոչվում է

$M(x;y)$ $F_1M + F_2M = 2a$ (1)

$2a > 2c$ (2)

$\overline{F_1M}\{x+c;y\}$ $|F_1M| = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$

$\overline{F_2M}\{x-c;y\}$ $|F_2M| = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$ } (3)

(3)-ը (1)-ում

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$ հարաբերությունը

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

(5)-ը տասնորդական համակարգում ունենալով բազմապատկենք, ապա տասնորդական բազմապատկենք հարակից

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2) \quad (6)$$

Եվ. $a^2-c^2 = b^2$ (7)

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ բոլոր a^2b^2

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (8)$$ – էլիպսի հավասարումն է

$2a$, $2b$ -ն անվանում են էլիպսի առանցքների երկարություններ, իսկ

a և b -ն՝ կիսառանցքներ

$a > c$

$1 > \frac{c}{a}$ $\frac{c}{a} < 1$ | $\frac{c}{a} = \varepsilon$ (էքսցենտրիսիտետ)

Հետևություն է (8)-ից

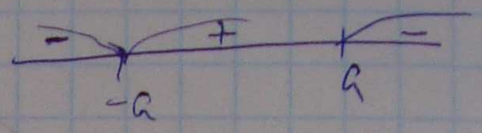
$M(x;y) \in L \Rightarrow M_1(-x;-y)$, $M_2(-x;y)$, $M_3(x;-y) \in L$

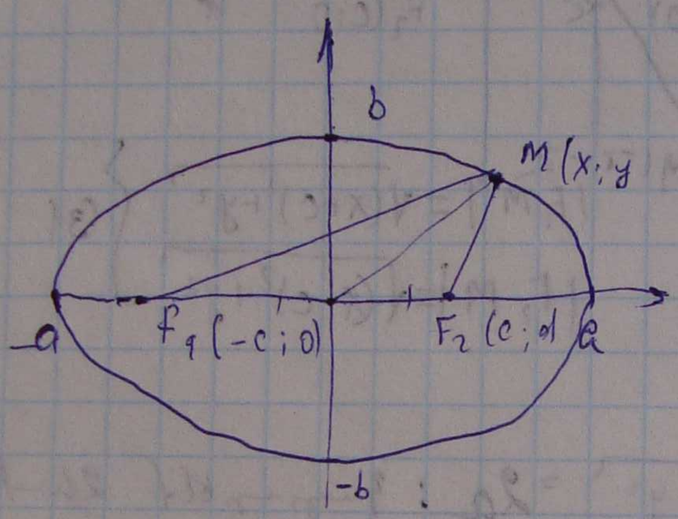
$y=0 \quad x^2=a^2, \quad x=\pm a$

$x=0 \quad y^2=b^2, \quad y=\pm b$

$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \quad a^2-x^2 \geq 0$

$(a-x)(a+x) \geq 0$





Ответ: $5-5, \quad \varepsilon=\frac{4}{5}$

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$a^2-c^2=b^2$

$\frac{c}{a}=\frac{4}{5} \qquad c=\frac{4}{5}a=\frac{4}{5}\cdot 5=4$

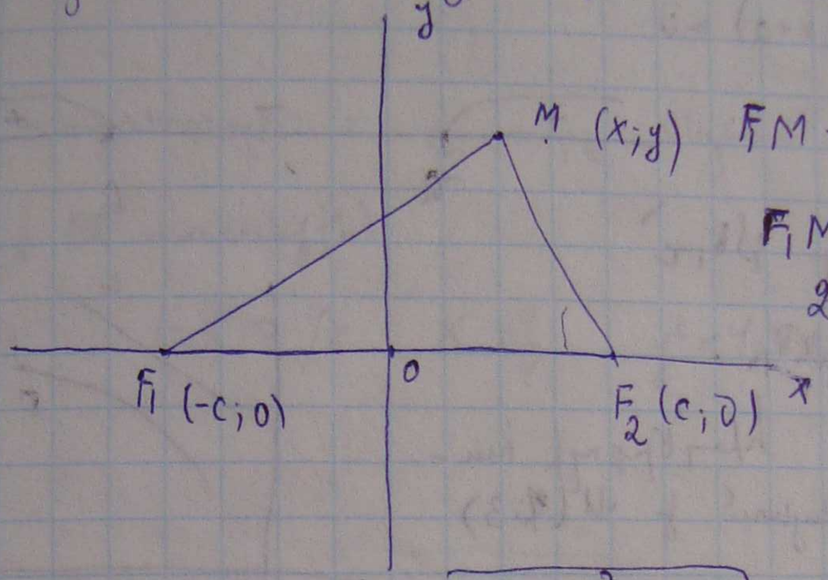
$25-16=b^2$

$b^2=9$

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

$9x^2+25y^2=225$

3. Հիպերբոլ: Դասագրության մեջ xy^2 կոորդինատների սահմանումը, որով հիպերբոլան որպես կոորդինատների հարթության կետերի երկրաչափական տեղ է սահմանվում հետևյալ հավասարումով k ... 0:



$F_1M - F_2M = \pm 2a$

$F_1M - F_2M = 2a$ (1)

$2a < 2c$

$a < c$ (2) $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$

Մեր հավասարումը տրված կլինի $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$ (3)

հայտնի եղանակով եկեք ձևափոխենք.

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \quad (4)$$

Դիցուք $c^2 - a^2 = b^2$:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

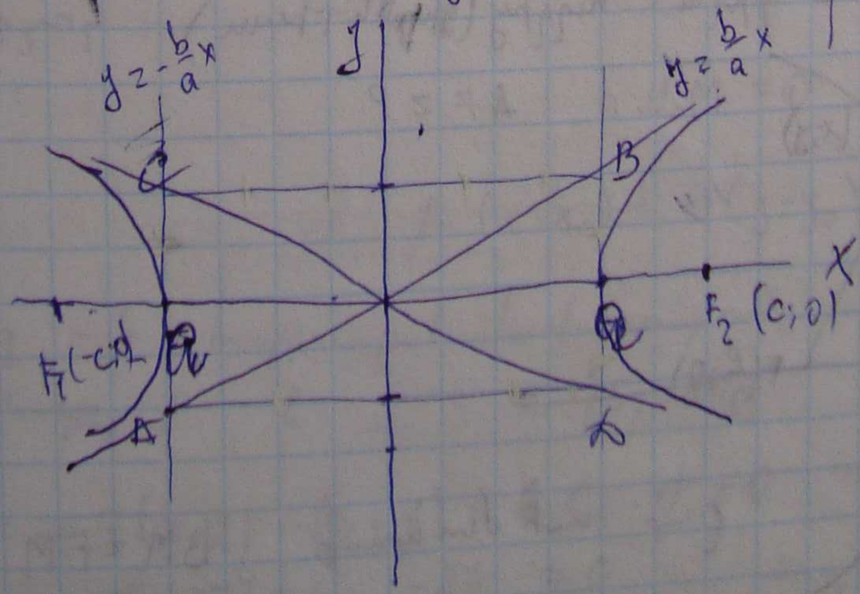
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (5) - \text{հիպերբոլի կանոնական հավասարում}$$

հատկությունները:

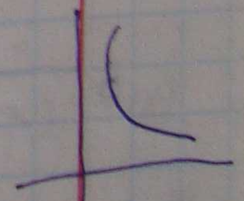
Հիպերբոլները: Դրա $y = 0$ $x^2 = a^2$ $x = \pm a$

$x = 0$ $y^2 = -b^2$ $\varnothing$

$2a$ - իրական առանցք
$2b$ - կեղծ առանցք



$y = \frac{1}{x}$



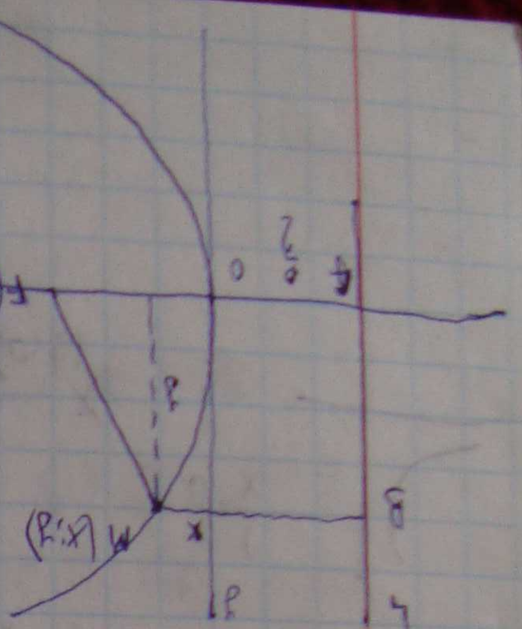
Եթե $M(x;y) \in L$

$(-x;-y) \in L$, $(-x;y)$,

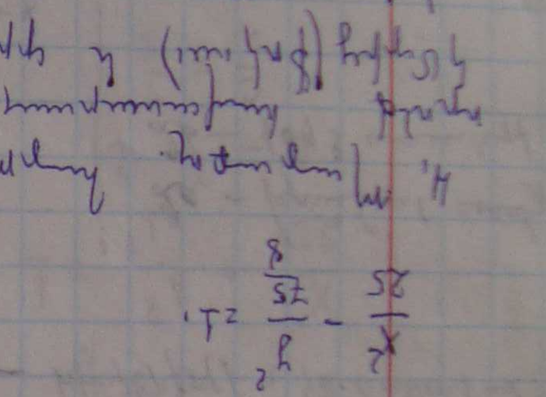
$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{\frac{25}{9}} = 1$.

4. Уравнение гиперболы y^2 имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где a и b — действительная и мнимая полуоси гиперболы. Найдите уравнение гиперболы, если расстояние между её вершинами равно 8, а расстояние между фокусами равно 10.

$A\Gamma = 2\rho$



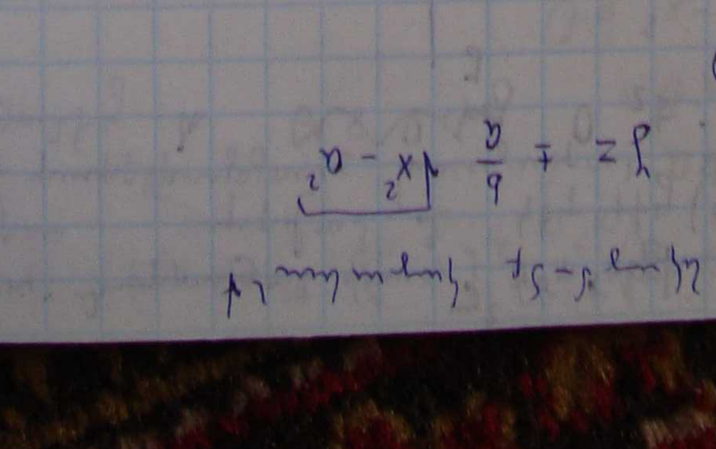
Где $MA = FM$ (1)



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ — каноническое уравнение гиперболы

$y = \pm \frac{b}{a} x$ — уравнения асимптот

$y^2 - a^2 = 0$, $(x-a)(x+a) = 0$



$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$

Ответ: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{\frac{25}{9}} = 1$

$c^2 - a^2 = b^2$

$\frac{9}{25} - \frac{9}{b^2} = 1$ $\quad \frac{9}{b^2} = \frac{16}{25} - 1$

$\frac{9}{b^2} = \frac{9}{25}$ $\quad b^2 = \frac{25 \cdot 9}{9} = 25$

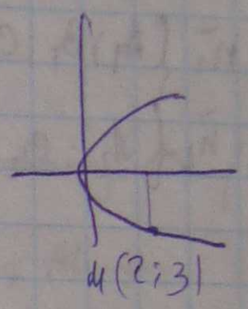
$$x+\frac{p}{2}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$$

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2$$

$$y^2=2px$$

Օր. գրել այն պարաբոլի հավասարումը, որ անցնում է $A(2;-3)$ կետով և սիմետրիկ է OX առանցքի համար

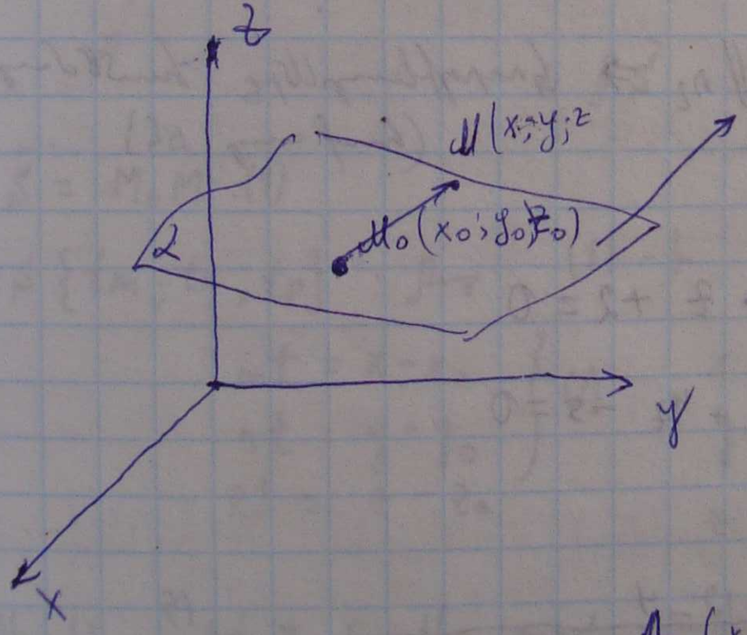
$$y^2=2px \qquad (-3)^2=4x \qquad x=\frac{9}{4} \qquad y^2=4{,}5x$$



Հարթության և տրված ցանկացած կետի

Տրված կետով անցնող տրված հարթությանը ուղղահայաց

հարթության հավասարումը



$\bar{n}(A;B;C)$ հարթության է տրված կետով անցնող ուղիղ $\overline{M_0M}\{x-x_0;y-y_0;z-z_0\}$

$\bar{n}\{A;B;C\}$

$\bar{n}\perp\alpha \Rightarrow \bar{n}\perp\overline{M_0M}\Rightarrow$

$\bar{n}\cdot\overline{M_0M}=0$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\ (1)$$

Օրինակ. գրել այն հարթության հավասարումը, որ անցնում է M_0 $M_0(2;-3;4)$ կետով և $\perp S$ $\bar{n}\{5;-1;6\}$

$$5(x-2)-(y+3)+6(z-4)=0$$

$$5x-y+6z-37=0$$

$Ax+By+Cz+D=0\ (2)$ – ընդհանուր հավասարումը

$\vec{n}_1 \vec{n}_2 = 0$, $\alpha \parallel \beta \Rightarrow$ Normalenvektoren parallel

(Auf Weg 61)

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad (3)$$

Ebene durch $(4|-1|2)$ $\quad 3x + y - z + 2 = 0$

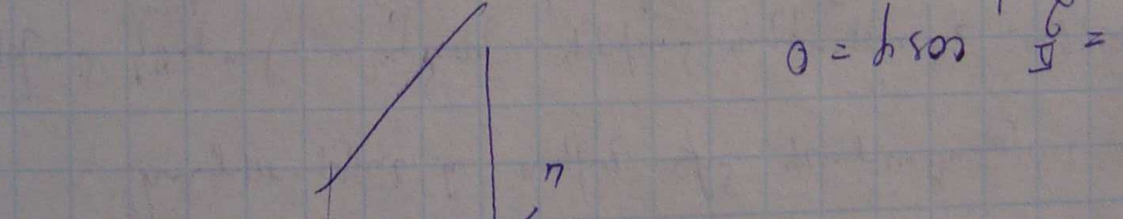
$$(P) \quad -x - 3y + z - 5 = 0$$

$\vec{n}_1 \{3; 1; -1\}$

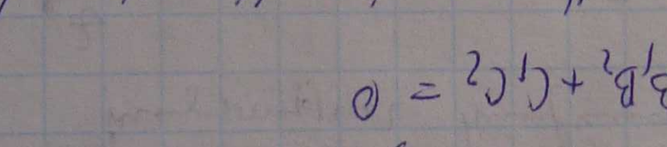
$\vec{n}_2 \{-1; -3; 1\}$

$$\cos\varphi = \frac{-3 - 12 - 1}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2}\cdot\sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2}} = -\frac{16}{26}$$

Ebene durch Punkt $M(x_0; y_0; z_0)$ mit $\vec{n}$ aus Gl



$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (4)$$



$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$ (5)

$\vec{n}_1 \{A_1; B_1; C_1\}$

$\vec{n}_2 \{A_2; B_2; C_2\}$

Gerade (L) Ausgangspunkt Richtungsvektor Ebene

$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ L

$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ (q)

Gerade $\parallel$ z. Koordinatenachse

2 Ausgangspunkte Richtungsvektor Ebene Ausschneiden

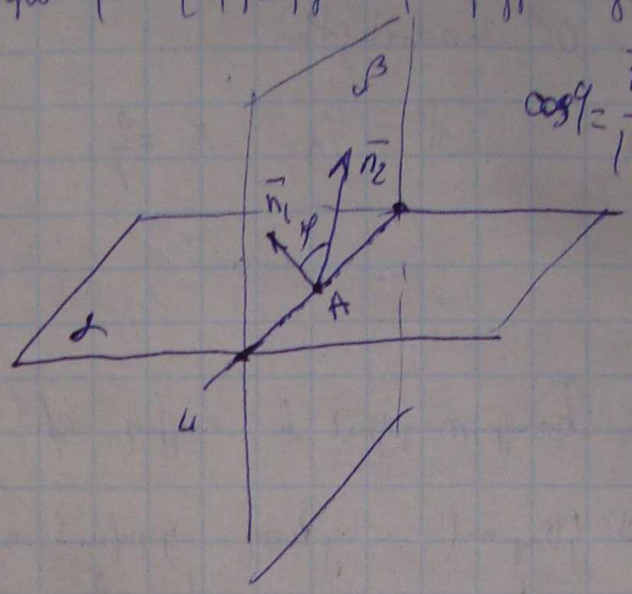
$\varphi = 0$, $\alpha \parallel \beta \Rightarrow$ Normalenvektoren parallel (Auf Weg 61)

2 հարթությունների կազմած անկյունը, երբ $\parallel$-ն և ուղղանկյուն կոորդինատներ: Երկու հարթությունների հարթությունը:

Դիցուք տրված են $(\alpha)\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$
$(\beta)\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ հ

Գրենք (α) հարթության նորմալ վեկտոր կոորդինատներով

$\bar{n}_1\{A_1;B_1;C_1\}$
$\bar{n}_2\{A_2;B_2;C_2\}$



$$\cos\varphi=\frac{\bar{n}_1\bar{n}_2}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|} \quad (1)$$

n_2 կետ $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi=0$

$\bar{n}_1\bar{n}_2=0$, $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

Դեպք $\varphi=0$, $\alpha\parallel\beta\Rightarrow n_1\parallel n_2\Rightarrow$ համապատասխան գործակիցները համեմատական են (համեմատական են)

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \quad (3)$$

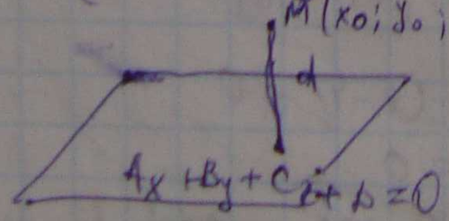
Օրինակ. Գրված է $(\alpha)\ 3x+4y-z+2=0$

$(\beta)\ -x-3y+4z-5=0$

$\bar{n}_1\{3;4;-1\}$
$\bar{n}_2\{-1;-3;4\}$

$$\cos\varphi=\frac{-3-12-4}{\sqrt{3^2+4^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2+4^2}}=-\frac{19}{26}$$

Կետից հեռավորությունը հարթությունից որոշելու մեթոդ



$$d=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad (4)$$

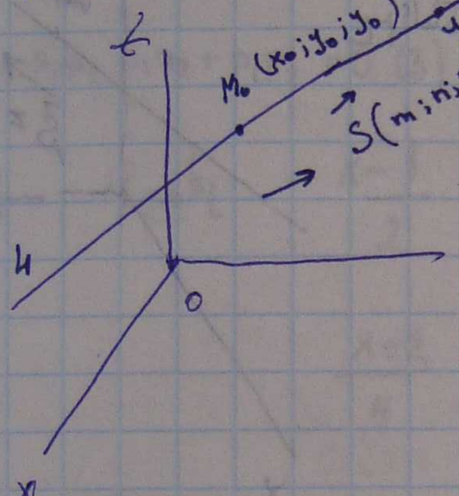
Օրինակ՝ գրված է $M_0(1;2;3)$ կետի հեռավորությունը d-ից

$$d = \frac{|3\cdot 1 + 4\cdot 2 + 3\cdot 2|}{\sqrt{9+16+1}} = \frac{10}{\sqrt{26}}$$

Տարածության մեջ տրված ուղիղը կարելի է որոշել որպես հատվող հարթությունների հատում

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (\alpha) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (\beta) \end{cases} \quad (1) \qquad \alpha \nparallel \beta$$

Տարածության մեջ տրված ցանկացած ուղիղ



$\bar{S}$ - ուղղորդող վեկտոր

$\bar{S} \parallel l$

$\bar{M_0M} \{x-x_0 ; y-y_0 ; z-z_0\}$

$\bar{S} \{m, n, p\}$

$l \parallel \bar{S} \Rightarrow \bar{M_0M} \parallel \bar{S} \Rightarrow$ համապատասխան $\alpha \Rightarrow \exists\, t$ թիվ

$t\bar{S} = \bar{M_0M}$ (1)

$t\bar{S}\{tm; tn, tp\}$: (1)-ից

$$\left.\begin{aligned} mt &= x - x_0 \\ nt &= y - y_0 \\ pt &= z - z_0 \end{aligned}\right\} (2) \qquad \left.\begin{aligned} x &= mt + x_0 \\ y &= nt + y_0 \\ z &= pt + z_0 \end{aligned}\right\} (3)$$

(3)-ի հավասարումները կոչվում են ուղղի պարամետրական հավասարումներ

պարամետրը՝ t:

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{x-x_0}{m} \\ t &= \frac{y-y_0}{n} \\ t &= \frac{z-z_0}{p} \end{aligned}\right| \qquad \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \quad (4)$$

(4)-ի հավասարումները կոչվում են ուղղի կանոնական հավասարումներ

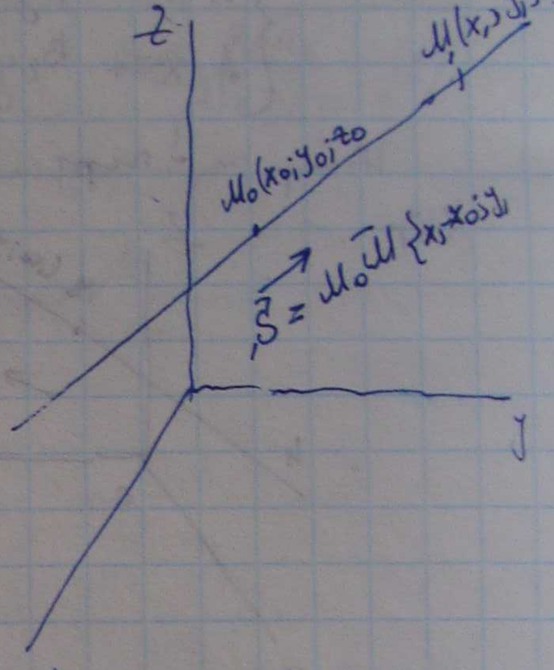
պարամետրը՝ t:

Որոշենք գիծը այլ ուղիղ հատվածներով, որը անցնում $M_0(2;-1;-3)$

կետով $L \parallel S$ $\bar{S}\{4;0;5\}$-ով

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{0} = \frac{z+3}{5} = t$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 4t+2 \\ y &= -1 \\ z &= 5t-3 \end{aligned}\right\} \text{պ.}$$



2 կետով անցնող ուղիղ հավասարումը

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

Օր. գտնել $M_0(1;-2;4)$ և $M_1(5;6;-7)$ կետերով անցնող հավասարումը

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{8} = \frac{z-4}{-11}$$

Երկու ուղիղների փոխադարձ անկյունը: Ուղիղների $\parallel$-ության և $\perp$-ության պայմանները

Դիցուք տրված են (L_1) $\frac{x-x_0}{m_1} = \frac{y-y_0}{n_1} = \frac{z-z_0}{p_1}$

(L_2) $\frac{x-x_1}{m_2} = \frac{y-y_1}{n_2} = \frac{z-z_0}{p_2}$

գծերը: L_1 ուղղի ուղղորդիչ վեկտորը $\bar{S}_1\{m_1, n_1, p_1\}$

Օրինակ. Գրել այն ուղղի հավասարումները, որը անցնում $M_0(2;-1;-3)$

կետով և $\parallel s$ $\bar{s}\{4;0;5\}$ -ին

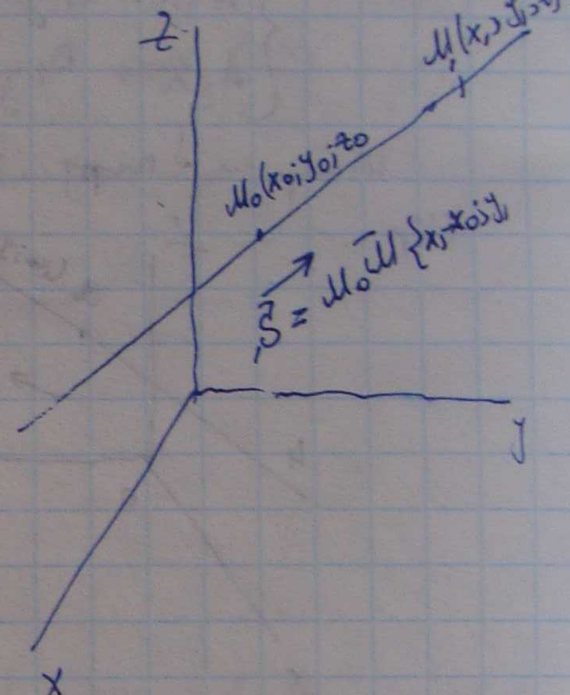
$$\text{է} \quad \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{0} = \frac{z+3}{5} = t$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 4t+2 \\ y &= -1 \\ z &= 5t-3 \end{aligned}\right\} \text{պ.}$$

2 կետերով անցնող ուղղի հավասարումները

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$



Օր. Գրել $M_0(1;-2;4)$ և $M_1(5;6;-7)$ կետերով անցնող հավասարումները

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{8} = \frac{z-4}{-11}$$

Երկու ուղիղների փոխադարձ անցումը: Ուղիղների $\parallel$-ության և $\perp$ության պայմանները

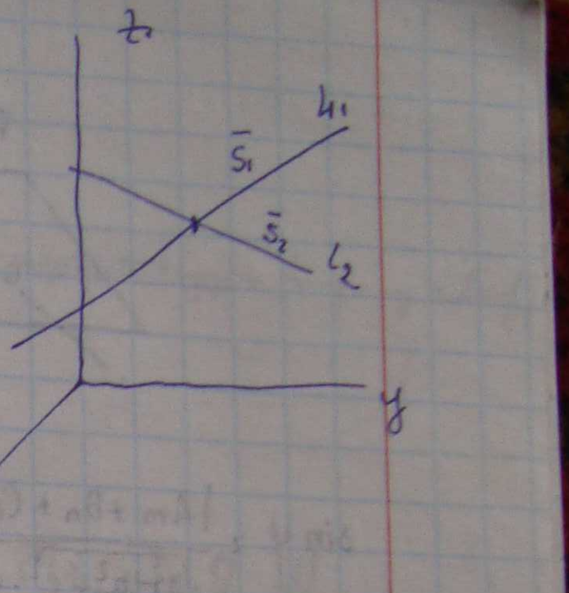
Դիցուք տրված են (L_1) $\frac{x-x_0}{m_1} = \frac{y-y_0}{n_1} = \frac{z-z_0}{p_1}$

(L_2) $\frac{x-x_1}{m_2} = \frac{y-y_1}{n_2} = \frac{z-z_0}{p_2}$

Գիտենք L_1 ուղղի ուղղորդիչ վեկտորը $\bar{S}_1\{m_1, n_1, p_1\}$

$\bar{S}_1$ $|L_2|$ -ին $\bar{S}_2\{m_2; n_2; p_2\}$

$$\cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$



Եթե $L_1 \parallel L_2 \Rightarrow \bar{S}_1 \parallel \bar{S}_2$ - համապատասխան (կոորդինատների

համեմատական են)

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad (2)$$

Եթե $L_1 \perp L_2 \Rightarrow \bar{S}_1 \perp \bar{S}_2 \quad \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 = 0$

$m_1m_2 + p_1p_2\ n_1n_2 + p_1p_2 = 0$ (3) - պայմանը որ $\perp$ լինեն տրված տողերը:

Օրինակ Գտնենք $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+1}{4}$ | $\frac{2}{4} \neq \frac{-3}{3} \neq \frac{4}{6}$

$$\frac{x+2}{4} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-2}{6}$$

$$\cos\varphi = \frac{8 - 9 + 24}{\sqrt{4+9+16} \cdot \sqrt{16+9+36}} = \frac{23}{\sqrt{29 \cdot 61}}$$

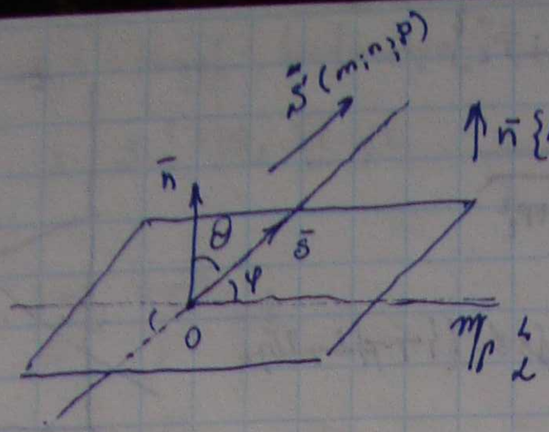
Տրված կետից տրված ~~հարթության~~ ուղղին հատող հարթության կազմելը:

Տրված են $A(x_0, y_0, z_0)$ կետը և L ուղիղը

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \quad (4)$$

Գտնել $\varphi = (\alpha, \widehat{L})$

Տրված կետով և տրված ուղղին ուղղահայաց անցնող հարթության կազմելը:



$\theta = (\hat{\bar{n}\,\bar{S}})$

$\cos\theta = \dfrac{\bar{n}\,\bar{S}}{|n|\,|S|}$ (1)

$\theta = \dfrac{\pi}{2} - \varphi \quad \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right) =$

$= \dfrac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$

$$\sin\varphi = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \quad (3)$$

Եզրակ. $\alpha \parallel L \Rightarrow \bar{n} \perp \bar{S}$

$Am + Bn + Cp = 0$ (4)

$\alpha \perp L \Rightarrow \bar{n} \parallel \bar{S}$

$\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$ (5)

Օրինակ $3x - 4y + 5 = 0$

$\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{0}$

$\bar{n}\{3;-4;0\}$

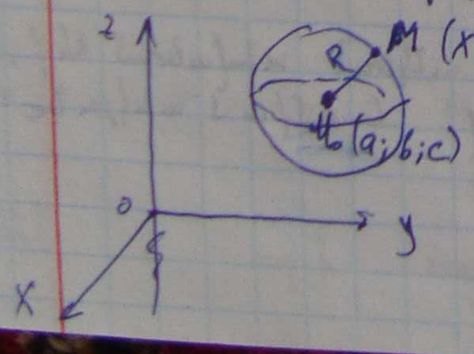
$\bar{S}\{5;2;0\}$

$\sin\varphi = \dfrac{|15-8|}{\sqrt{9+16}\,\sqrt{25+4}} = \dfrac{7}{5\sqrt{29}}$

II Կարգի տարածական կորեր

1) Շրջանագիծ (Գնդային հատում)

Կարտեզյան կոորդինատների համակարգում կենտրոնը $M_0(a;b;c)$ կետում գտնվող R շառավղով գնդային մակերևույթի հավասարումը կստանանք հետևյալ կերպ.



$\overline{M_0M}\ \{x-a, y-b, z-c\}$

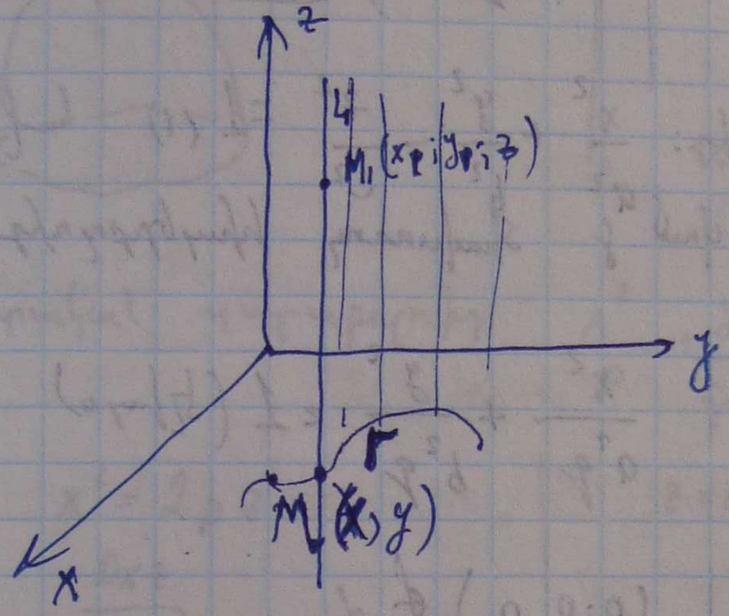
$|\overline{M_0M}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \quad (1)$$

$$a = b = c = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Այն հավասարումը, որը տրված է (1) ~~տարածության~~ հավասարումով, կոչվում է գնդային մակերույթ:

2. Գլանային մակերույթ.



$$F(x; y) = 0 \quad (1)$$
$$y = kx + b$$
$$y - kx - b = 0$$
$$F(x; y) = 0$$

f - ուղղորդիչ գիծ

L - ծնորդ ; L - r -ով զուգահեռների հետ հատ

$\parallel$, որը հատում է գծային մակերույթը: Այդպես որ (1) հավասարումը որոշում է գծային մակերույթ հավասարումն է:

$$\begin{cases} F(x; y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Այդ ուղղորդիչ գիծը գտնվում է xy գծային մակերույթում

3. Էլիպսոիդ (էլիպսային մակերույթ) : Սահմանում: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

հավասարումով որոշվող մակերույթը կոչվում է էլիպսոիդ:

$x=h \quad y=h \qquad (0;0;0) \notin \alpha$

$x=0 \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

5. Гиперболический параболоид

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ — Гиперболический параболоид

$z = h \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1$

$x = 0 \;,\; y = 0 \qquad z^2 = c^2$

$z = \pm c$

$h > 0$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$x = 0 \qquad -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

$y = 0 \qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Оуz — Oxz

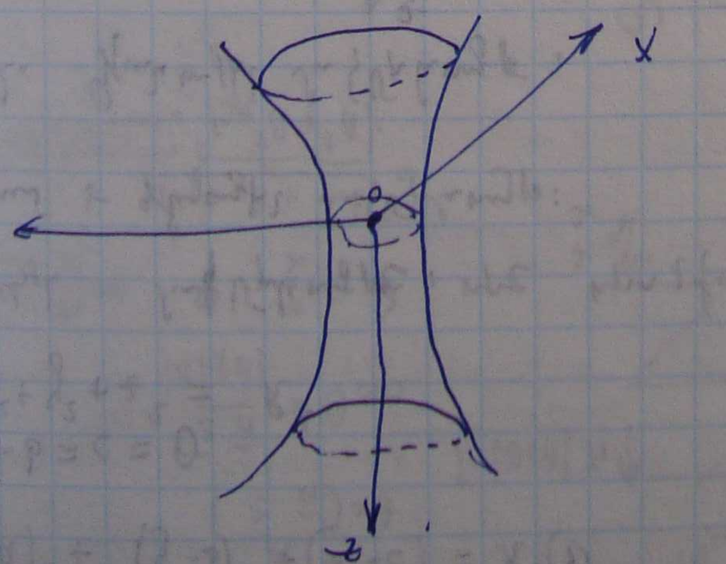
0 × z

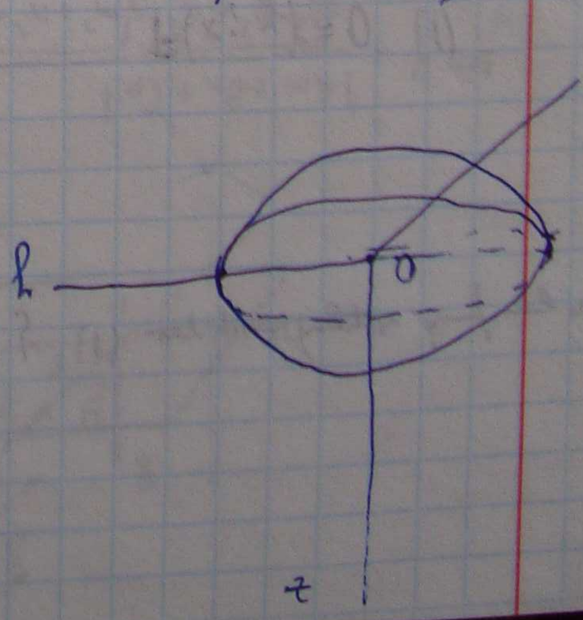
$z = h \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right) \qquad q > 0$

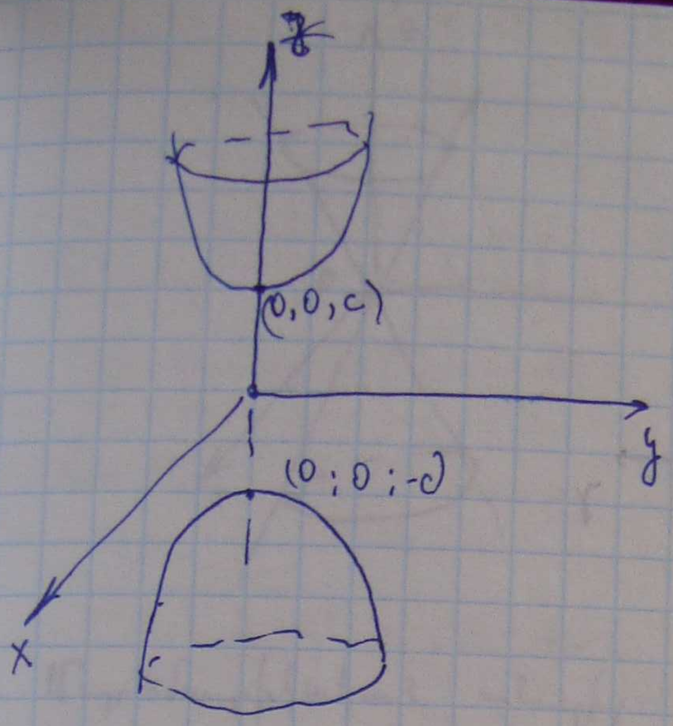
$\frac{x^2}{a^2 q} + \frac{y^2}{b^2 q} = 1$ (Эллипс)

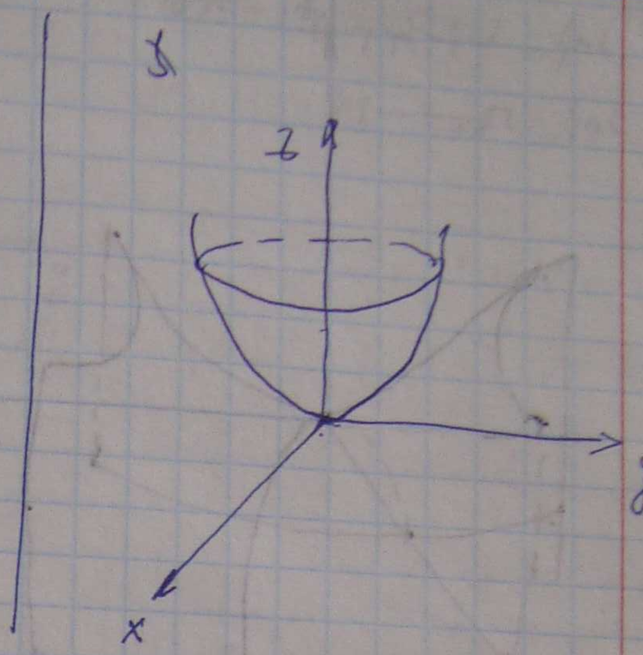
6. Однополостный гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (1) Канонический вид

при любом фиксированном β сечение гиперболоида









6. Эллиптический параболоид: $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$, $p>0$ $q>0$

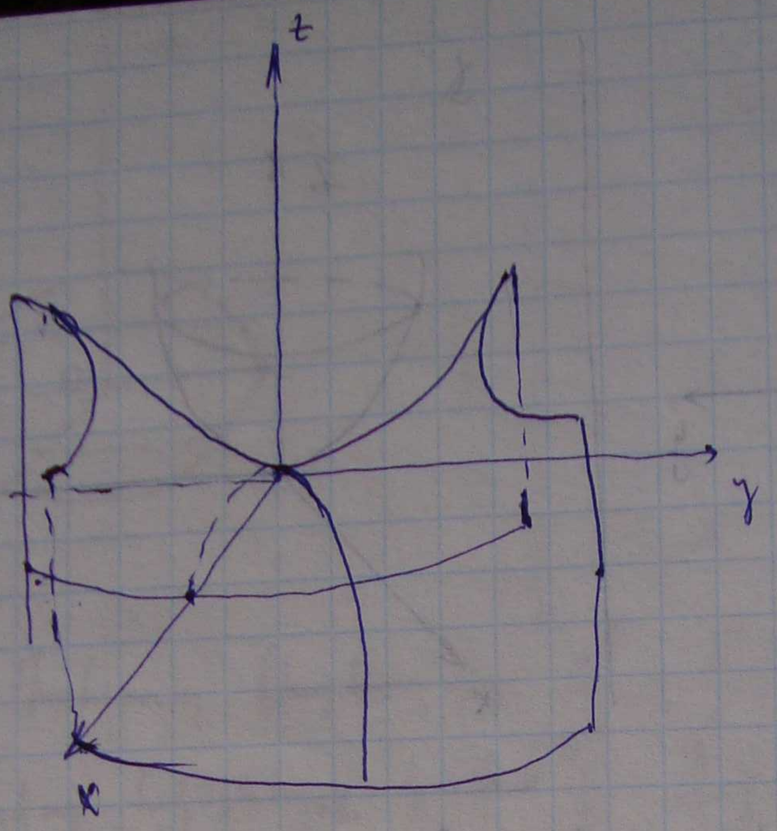
$y=0$	$x^2 = 2pz$	$z=h$	$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h$
	$\underline{Oxz}$		$\frac{x^2}{2ph} + \frac{y^2}{2qh} = 1$
$x=0$	$y^2 = 2qz$ $\boxed{Oyz}$		

7. Гиперболический параболоид: $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$, $p>0$ $q>0$

$y=0$ $x^2 = 2pz$

$x=0$ $y = -2qz$

$z=h$ $\frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1$. Гиперб:



8. Գոհ (Գոհամիջ մակերևույթ, II կարգի գոհ).

սահմանում $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (1) հավասարումով

որոշվող մակերևույթը կոչվում է կոնական մակերևույթ:

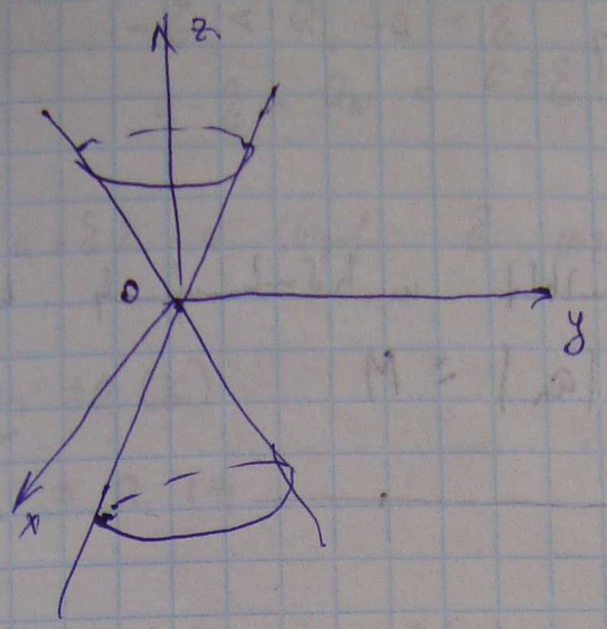
Երկ հարթ $z = h$ հարթությունը

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{h}{c}\right)^2.$$

$$\frac{x^2}{\left(a\frac{h}{c}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{bh}{c}\right)^2} = 1 \text{ էլիպս}$$

$x = 0$ կամ $y = 0$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad \left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)\cdot\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = 0$$



Կոորդինատական անկյուն

Հաջորդականություն: Հաջորդականության տեսակները

Սահմանում: Բնական N բնական թվերի բազմության վրա որոշված
$ -ն հարման ֆունկցիան հաջորդականություն: $f(n)$, a_n, x_n:

Օր. $f(n) = \frac{1}{n}$, $f(n) = \frac{n+1}{n}$, $a_n = a_1 + d(n-1)$

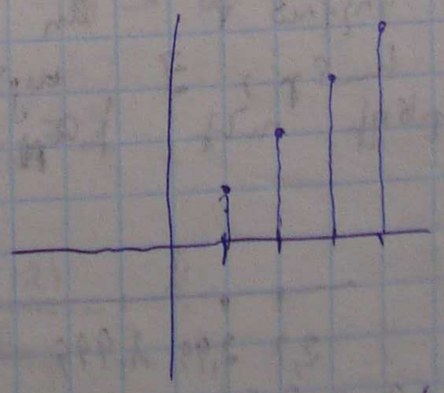
$b_n = b_1 q^{n-1}$, $x_n = x_{n-2} + x_{n-1}$

Հաջորդականությունը կանխորոշված օրենք, ըստ որի և ում ցանկացած բնական թվին համապատասխանում է միայն մեկ:

$f(3) = \frac{1}{3}$, $f(100) = \frac{101}{100}$

$a_n = n$

1, 2, 3, 4.

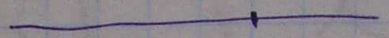


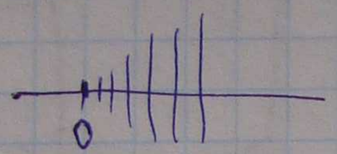
Հաջորդականությունը կանխորոշված տվյալ ըստ $\forall a_n < a_{n+1}$ / $a_n > a_{n+1}$

$a_n \le a_{n+1}$ } (нуж) последовательность

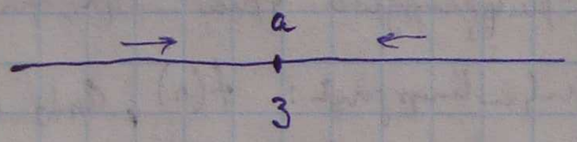
$a_n \ge a_{n+1}$ } Ч.Т.

Числовая последовательность называется ограниченной, если $\exists$ $M > 0$, при $\forall n$ $|a_n| \le M$

$a_n = \frac{n}{n+1}$ $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}$ 

$a_n = \frac{1}{n}$ 

огр. с 2х сторон



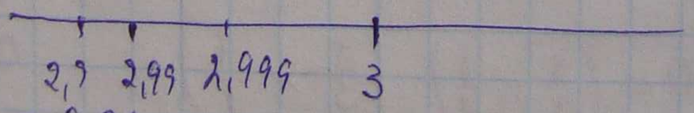
2,9; 2,99; 2,999 ... $\to 3$

3,1; 3,01; 3,001; ... $\to 3$

2,9; 3,1; 2,99; 3,01; 2,999 ...

Предел числа к a_n:

Число a - предел a_n, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ номер N, при $\forall n \ge N$, $n \in \mathbb{N}$ выполняется $|a_N - a| < \varepsilon$ (1)

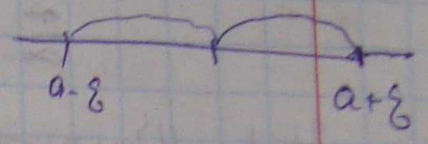


$3 - 2{,}99 = 0{,}01$

$n = 2$ $N > 2$

$$-\varepsilon < a_N - a < \varepsilon$$
$$a - \varepsilon < a_N < a + \varepsilon \quad (2)$$

$(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ a կետի ε շառավիղով բաց միջակայք



$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad (3)$$
$$\lim a_n = a \quad (4)$$

Ֆունկցիայի սահման կետում, սեփականությունները հետագայում

որ $y = f(x)$ ֆ-ն, որ սահմանված է a կետի որևէ շրջակայքում:
գուցե բացի a կետից:

Սահման: B-ն կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի սահման $x \to a$, երբ
$\forall \varepsilon > 0$, որքան էլ մեր փոքր լինի $\exists$ այնպիսի $\delta(\varepsilon > 0) > 0$,
որ a կետի շրջակայքից այլ բոլոր x-երի, որոնց համար $0 < |x-a| < \delta$ և տեղի ունի $|f(x) - B| < \varepsilon$ (1)

(1)-ը կարող է գրվել նաև $B - \varepsilon < f(x) < B + \varepsilon$ (2)

$$\lim_{x\to a} f(x) = B \quad (3)$$

$$\lim_{x\to 2} (3x-4) = \lim_{x\to 2} (6-4) = 2$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$$

$|3x-4-2| < 0{,}1$ | $3|x-2| < \frac{1}{10}$

$|3x-6| < \frac{1}{10}$ | $|x-2| < \frac{1}{30}$

$\frac{0}{0}$ - անորոշություն

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}}=\infty$$

Определение Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x\to a$, если $\lim_{x\to a} f(x)=0$.

Определение Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to a$, если $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$.

Неопределенности: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $\infty\cdot 0$, ∞^0, 0^0, 1^∞

Раскрытие неопределенностей,

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ функции, определенные в окрестности точки a, кроме, может быть, самой точки a.

Функция $f(x)$ называется бесконечно малой по сравнению с функцией $\varphi(x)$ при $x\to a$, если $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0$.

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой по сравнению с функцией $\varphi(x)$ при $x\to a$, если $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty$.

Функции f и φ называются функциями одного порядка малости при $x\to a$, если $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=A\neq 0$.

Функции f и φ называются эквивалентными при $x\to a$, если $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=1$.

Обозначение: $f(x)\sim\varphi(x)$ при $x\to a$.

Функция $f(x)$ называется бесконечно малой порядка k по сравнению с функцией $\varphi(x)$ при $x\to a$, если $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(\varphi(x))^k}=A\neq 0

Теорема 2 о пределах функций и некоторые простые следствия из нее, называемые часто

1. $\lim\limits_{x\to a} C = C$

2. Теорема: Если $U(x)$ и $V(x)$ функции имеющие пределы (т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} U(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} V(x) = b$) тогда

а) $\lim\limits_{x\to x_0}(U \pm V) = \lim\limits_{x\to x_0} U \pm \lim\limits_{x\to x_0} V = a \pm b$

б) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{U}{V} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} U}{\lim\limits_{x\to x_0} V} = \frac{a}{b}$, если $b \neq 0$

в) $\lim\limits_{x\to x_0} U \cdot V = \lim\limits_{x\to x_0} U \cdot \lim\limits_{x\to x_0} V = a \cdot b$

Следствия. $\lim\limits_{x\to x_0} CV = C \lim\limits_{x\to x_0} V$ (C - const)

I Замечательный предел. $\lim\limits_{U\to 0} \frac{\sin U}{U} = 1$ (Читать - синус U), где U - угол в радианах

II Если $\sin U \sim U$ эквивалентны (синусы равны); обратное неверно

Доказательство $\sin U = 0$

II З. п. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

$\lim\limits_{\alpha\to\infty} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$ $\quad e = 2,718282\ldots$

Иррациональность. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

$n = 1 \quad a_n = 2$

$n = 2$

Ածանցյալ

Ածանցյալի գաղափարը բերող խնդիրներ: Ֆունկցիայի ածանցյալը:

1. Դիտարկենք հնգյ շարժման օրենքը: Մեկի ցիկլերի ընթացքում

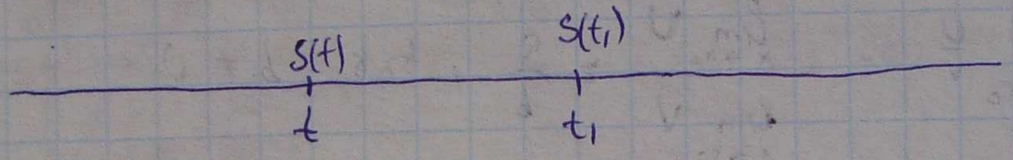
հնգյ շարժ-ը տրվ. $S = S(t)$

միևնույն ժամանակամիջոցում ծ ուղղագիծ շարժում: Ընդունված

t պահին այն գտնվ ծ

$\Delta S = S(t_1) - S(t)$

$\Delta t = t_1 - t$, Δt ժամանակի աճ

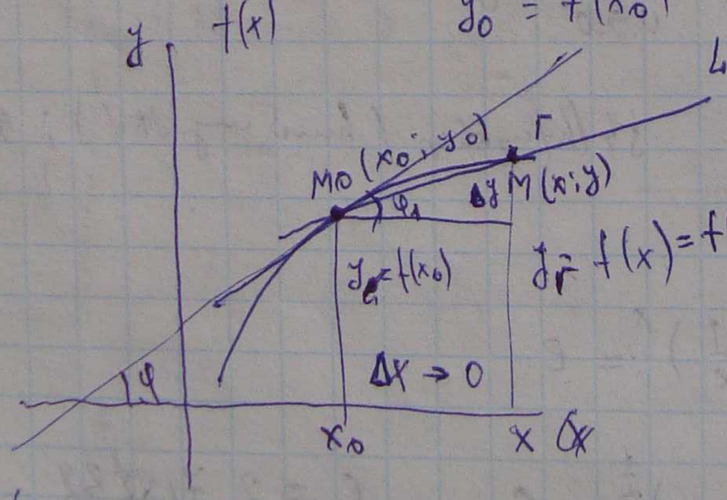


$V_{միջ} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$

$V_{ակնթարթ} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$ (1)

Դիցուք տրված ֆ ընդմիջումի վրա: Պրոմն ֆ $f(x)$ -ը,

նկարը



$x - x_0 = \Delta x$

$x = x_0 + \Delta x$

r հնգ M_0 կետի շրջակայքում անընդհատ ֆկց

ծ հնգ M_0M հատվածի առնչությամբ հետևյալ դիրքը,

M կետը հնգ երկրագնդի ֆցիոն ֆ M_0-ի

$f(x_0)$

$x - x_0 = \Delta x$

$f(x) - f(x_0) = \Delta y$

$k_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

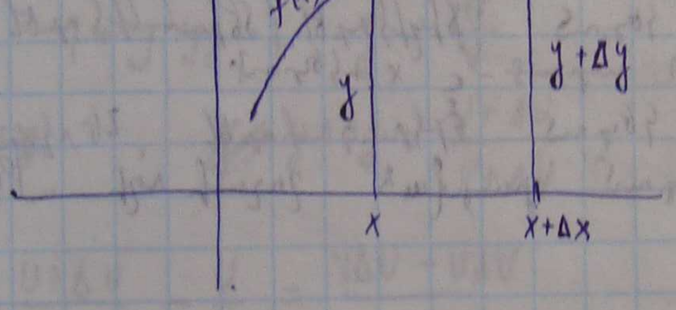
[illegible] $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

$tg\,\varphi_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ [illegible]

$tg\,\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} tg\,\varphi_1 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (3)

[illegible]

[illegible] $y = f(x)$ [illegible]



$\frac{\Delta y}{\Delta x}$

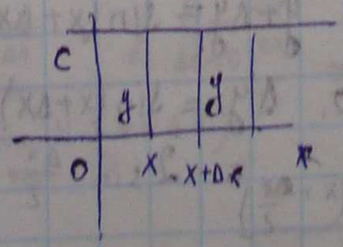
$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$

$= y' = y = f'(x) = \frac{dy}{dx}$

Հաստատուն: $y = f(x)$ [illegible] Δy աճի և արգումենտի Δx աճի

հարաբերության սահմանը, երբ արգումենտի աճը զրոյական է ($\Delta x \to 0$), գոյություն ունի, հավասար է $f(x)$ ֆ-ի ածանցյալին x կետում

1. $c' = 0$.



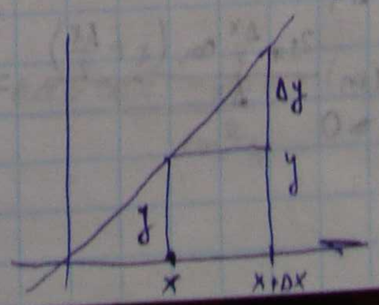
$\Delta y = 0$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$

$y' = 0, \; c' = 0$

2. $y = x$



$y = x$

$y + \Delta y = x + \Delta x$

$\Delta y = x + \Delta x - x = \Delta x$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$ $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$ $y' = 1$

3. Գրենք $y = x^2$ ֆ-ն ածանցյալը ըստ սահմանման

1. $x + \Delta x$, $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$

2. Գտնենք ֆ-ի աճը՝ $y + \Delta y - y = (x + \Delta x)^2 - x^2$

$$\Delta y = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$$

3. Կազմենք ֆ-ի Δy աճի Δx արգումենտի աճի հարաբերությունը

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

4. $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

Եթե 1-ին y'-ը x կետում ֆիզիկորեն (երկրաչափորեն) արտահայտում է տրված կետում տրված x-ի արագությունը (կողմնակի անկյան տանգենսը), ապա 3-րդ y'-ը x կետում երկրաչափորեն արտահայտում է կոր x_0 աբսցիսա ունեցող կետում գծած շոշափողի անկյունային գործակիցը:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$

4. $y = \sin x$

1. $x + \Delta x$, $y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$

2. $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$

3. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

4. $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \cos x$$

Теорема о производной суммы, произведения и частного

Пусть $U(x) = U$ и $V(x) = V$ — дифференцируемые функции (имеющие производную) $x = x$. Тогда (если U' и V' существуют) имеем

а) $(U \pm V)' = U' \pm V'$

б) $(U \cdot V)' = U'V + U \cdot V'$

в) $(C \cdot U)' = C \cdot U'$

г) $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$, если $V(x) \neq 0$

Докажем, например, б): $y = \frac{U}{V}$

1) $x + \Delta x$, $y + \Delta y = \frac{U + \Delta U}{V + \Delta V}$

2) $\Delta y = \frac{U + \Delta U}{V + \Delta V} - \frac{U}{V} = \frac{V\Delta U - U\Delta V}{V(V + \Delta V)}$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{V \frac{\Delta U}{\Delta x} - U \frac{\Delta V}{\Delta x}}{V(V + \Delta V)}$

4) $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{V \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} - U \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \to 0} V(V + \Delta V)} = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

Пример $y = \operatorname{tg} x$

$$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$y = \ln x$

1. $x + \Delta x \qquad y + \Delta y = \ln(x + \Delta x)$

2) $\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$

4) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) =$

$= \frac{1}{x} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$

$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}$

$\log_a |x| = \frac{1}{x \ln a}$

Функция называется сложной.

$y = f(u) \qquad u = \varphi(x) \qquad u_0' = \varphi(x_0)$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$

$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y_u' \cdot u_x'$

$y = \sin^3 x$

$y = u^3 \quad u = \sin x$

$y'_x = 3u^2 \cdot \cos x$

$y'_x = 3\sin^2 x \cos x$

$(\ln u)' = \frac{1}{\ln u} \cdot u'$

$y = a^x \qquad y = x^\alpha$

а) $y = a^x$

$(\ln y)' = (x \ln a)'_x$

$\frac{1}{y} \cdot y'_x = \ln a$

$y'_x = y \ln a$

$y' = a^x \ln a$

Пр. $(3^x)' = 3^x \ln 3$

$(3^{\cos x})' = 3^{\cos x} \cdot \ln 3 \cdot (-\sin x)$

б) $y = x^\alpha$

$(\ln y) = (\alpha \ln x)'$

$\frac{1}{y} \cdot y'_x = \alpha \cdot \frac{1}{x}$

$y'_x = \frac{\alpha y}{x}$

$y'_x = \alpha \frac{x^\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

Производная ф-ции: Производная ~~обратной~~ обратной ф-ции ~~не~~ существует

$y = f(x) \qquad \underline{x = \varphi(y) \qquad y = f(x)}$

$1 = \varphi'(y) \quad f'(x)$

$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$

Пример 1. $y = \arcsin x \qquad \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad \sin(\arcsin x) = x \quad x = \sin y$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Формулы дифференцирования и производные

I

1. $(U \pm V)' = U' \pm V'$
2. $(U \cdot V)' = U'V + UV'$
3. $(CU)' = CU'$
4. $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

дифференцирование

II. Таблица производных

1. $C' = 0$
2. $x' = 1$
3. $x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$ $\left((x^n)' = nx^{n-1}\right)$
4. $(\sin x)' = \cos x$
5. $(\cos x)' = -\sin x$
6. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
8. $(a^x)' = a^x \ln a$
9. $(e^x)' = e^x$
10. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
11. $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$
12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

15. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Функции дифференцируемые

Пусть $y = f(x)$ – однозначная и $x = x$ (т.е. $\exists f'(x)$ - ?)

тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ (1)

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$; где $\alpha \to 0$ $\quad \Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x$ (2)

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{f'(x)\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{f'(x)} = 0$

$\alpha \Delta x$ – величина более высокого порядка малости чем $f'(x)\Delta x$ и называется

Часть приращения $f'(x)\Delta x$ называется дифференциалом ф-ии и обозначается

Дифференциал: $f(x)$ дифференцируемая ф-ия приращение Δx и $f(x)$ ф-я

определенная и имеет производную: $dy = f'(x)\Delta x$ (3) или $df(x) = f'(x)\Delta x$

Пусть $y = x$

$dx = x'\Delta x$

$dx = \Delta x$ (4)

$dy = f'(x)dx$ (5) (dx – ~~x~~ независимая переменная)

$d\sin x = \cos x \cdot dx$

$d\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x} dx$

Производная: $f(x)$ в $(n-1)$-ю степень называется производной степени n от $f(x)$ и обозначается

$$\left(f^{(n-1)}(x)\right)' = f^{(n)}(x)$$

$f^{(0)}(x) = f(x)$, функция

Пусть $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}, \bar{l}, \bar{m}, \bar{n}, \ldots$ — (100)

$(1), (2), (3), \ldots$ — (100)

$y = f(x)$ в $(n-1)$ раз степень n называется производной степени n от $f(x)$ и обозначается $y^{(n)}$ (читается y n-ное)

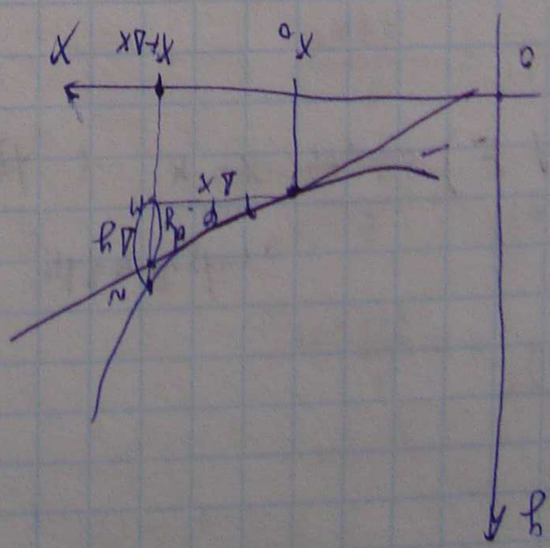
$$d\left(d^{n-1}y\right) = d^n y \qquad (dx)^n = dx^n$$

$$d^n y = f^{(n)}(x)\,dx^n$$

Производная: $y = f(x)$ в $x = x_0$ называется предел $\lim_{\Delta x \to 0}$ (предел $\exists$ $f'(x)$)

$f'(x)$ — если $\left(f'(x)\right)' = f''(x)$

$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x \qquad (\sin x)'' = \sin x$



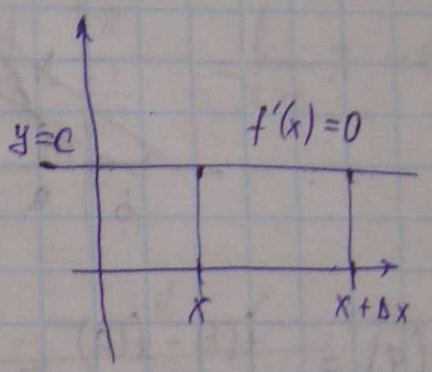
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{MN}{\Delta x}$$

$$MN = \operatorname{tg}\varphi \cdot \Delta x = f'(x)\,\Delta x = dy$$

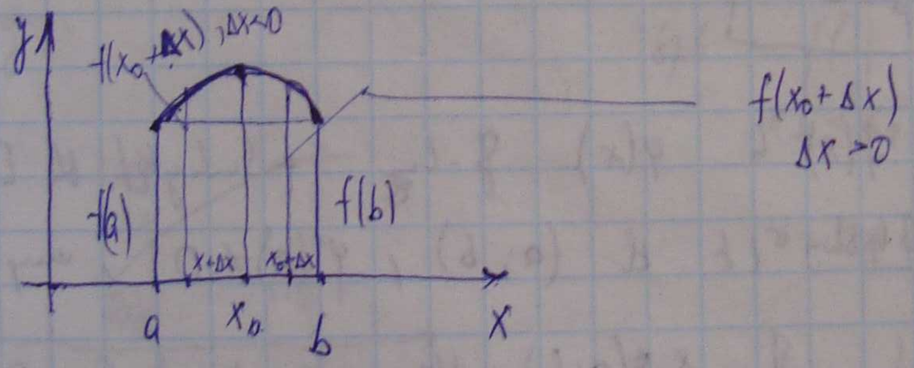
[illegible]

I. Ռոլլի թեորեմ: (Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս 17-րդ դար) Եթե $f(x)=c$ անընդհատ է $[a;b]$ հատվածում, մի ֆունկցիա է $(a;b)$ միջակայքում և ~~AB~~ ab հատվածի ծայրակետերում ընդունում է հավասար արժեքներ $f(a)=f(b)$, ապա ab միջակայքում գտնվում է $x_0 \in (a;b)$ կետ, որի համար $f'(x_0)=0$:

Ապացույց. ա) Հետազոտենք $f(x)=c$



բ) Հետազոտենք $y=f(x)$ (հետագծով)



ա) $f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \le 0$, $\Delta x>0$

բ) $f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \le 0$, $\Delta x<0$

ա') $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \le 0$ →

բ') $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \ge 0$ ↗

ա'') $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \le 0$

բ'') $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \ge 0$

→ ∪ $f'(x_0)=0$

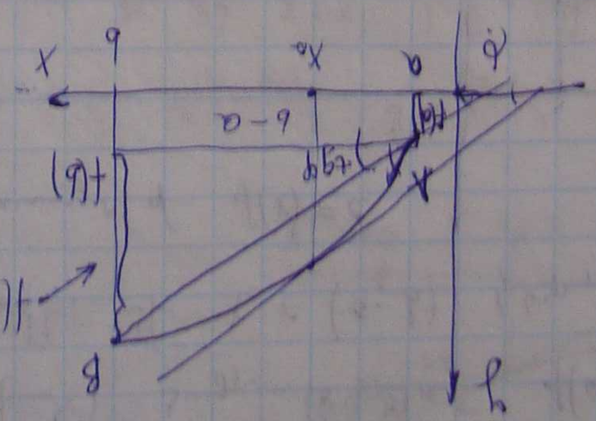
Теорема Лагранжа: Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a;b]$ и дифференцируемы на $(a;b)$, причем $\varphi'(x) \neq 0$, то найдется такая точка $x_0 \in (a;b)$, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}$$

Доказательство (для $\varphi(x) = x$):

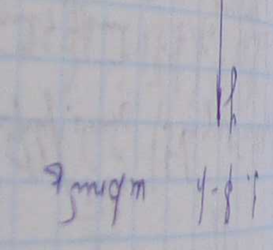
Если $f(a) = f(b)$, то $x_0 = c$ — любая точка $(a;b)$.

Если $f(a) \neq f(b)$, то x_0 — такая точка, что $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$



$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$$

Теорема доказана. ∎



$\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} \varphi(x) = 0 \quad \left(\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} \varphi(x) = \infty\right)$

Если $\exists \lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$, то $\exists \lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$.

Пример. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

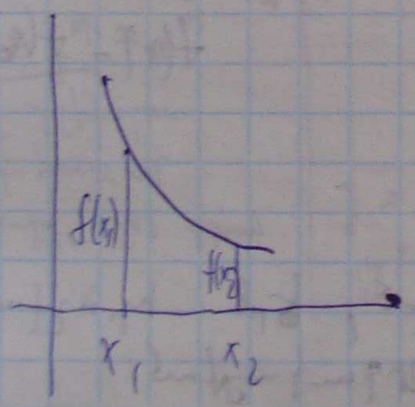
Пр. $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$

Неопределенности

Возрастание функции на промежутке

1. Ф-я называется возрастающей

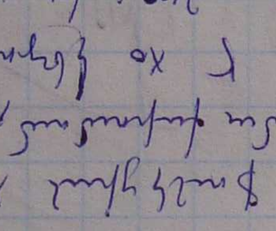
если $f(x)$ ф-я такая что $x_1 < x_2$ и $f(x_1) < f(x_2)$, пишут ↑



если $x_1 < x_2$ и $f(x_1) > f(x_2)$, пишут ↓

$f(x_1) \le f(x_2)$ - нестрогое возрастание ↑

$f(x_1) > f(x_2)$ دالة تناقصية.

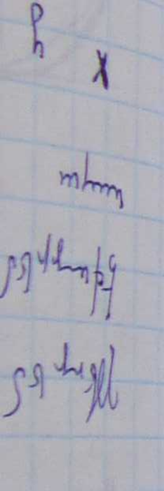


دالة زوجية

تعريف: ليكن $[a;b]$ مجموعة متناظرة و $f(x)$ دالة معرفة على $[a;b]$، يقال أن $f(x)$ دالة زوجية إذا تحقق:

$f(-x) = f(x)$ من أجل كل x من $[a;b]$

ملاحظة: التمثيل البياني لدالة زوجية يقبل محور التراتيب كمحور تناظر.



تعريف: ليكن $[a;b]$ مجموعة متناظرة و $f(x)$ دالة معرفة على $[a;b]$، يقال أن $f(x)$ دالة فردية إذا تحقق:

$f(-x) = -f(x)$ من أجل كل x من $[a;b]$

ملاحظة: التمثيل البياني لدالة فردية يقبل المبدأ كمركز تناظر.

خاصية: ليكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

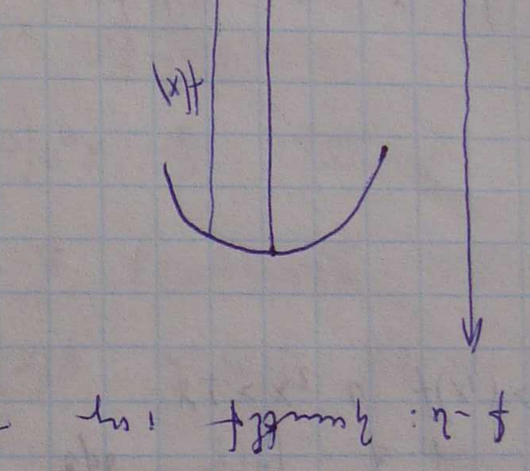
f دالة ثابتة على I $\Leftrightarrow$ $f'(x) = 0$ من أجل كل x من I.

خاصية: ليكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

f دالة متزايدة على I $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$ من أجل كل x من I.

خاصية: ليكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

f دالة متناقصة على I $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0$ من أجل كل x من I.

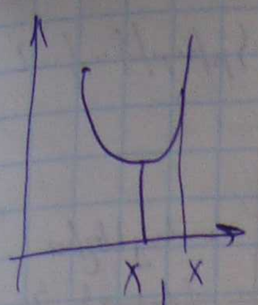


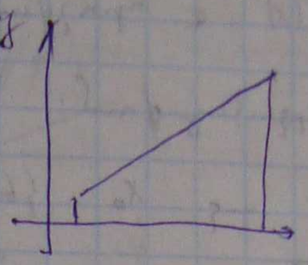
نعلم أنه إذا كانت دالة متزايدة تماما على I و x_1 عنصر من I بحيث $x_1 > x$ فإن

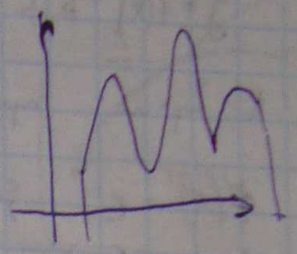
$f(x_1) - f(x) > 0$

نعلم أنه إذا كانت دالة متناقصة تماما على I و x_0 عنصر من I بحيث $x < x_0$ فإن

$f(x) - f(x_0) < 0$







Այն կետերը որտեղում f-ի $\exists$ գրաֆիկին տարված ~~գրամ~~ = γ 0-ի կոչվում են f-ի տրոհման կետեր
Առանձնահատուկ կետեր, որտեղում $\exists$ գրաֆիկին $\not\exists$ որոշ f-ի
$\exists$ ոչ վերջ կոչվում են ֆունկցիայի հոդակտուցային կետեր

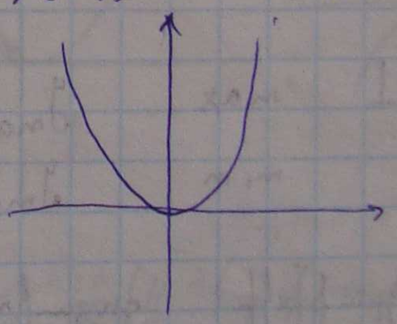
$\sqrt{x}$, $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x<0$ $x>0$ տարբեր նշան ունի

Ֆերմայի (ֆերմատի թ-ն) Եթե $f(x)$ f-ի $x=x_0$ կետում ունի էքստրեմում (մաքսիմում կամ մինիմում) և եթե այդ կետում $\exists$ ունի f-ի ածանցյալը, ապա $f'(x_0)=0$ (էքստրեմումի գոյության անհրաժեշտ պայման)

x	y	z
x^n	$+ y^n$	$= z^n$

գոնե մեկի աստիճանը մեծ զրոյից

Որ. $y = x^2$
$y' = 2x$
$2x = 0$
$x = 0$

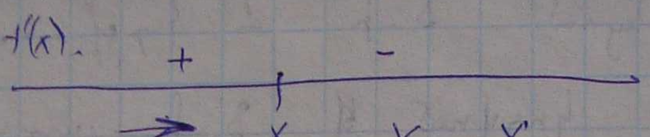


$y = x^3$
$y' = 3x^2$
$3x^2 = 0$
$x = 0$

Թեորեմ 2

Դիցուք $y=f(x)$ ֆ-ն $f'(x)$-ը պարզագույն է x_0 կետում և x_0 կետում ֆունկցիան ունի վերջավոր ածանցյալ:

Եթե $f'(x)$-ը նշանը x_0 կետի միջակայքում անցնելիս + -ից - է, ապա կետում $f(x)$ ֆ-ն x_0 կետում ունի max:



$x = x_0$ $y_{max} = y(x_0) = f(x_0)$

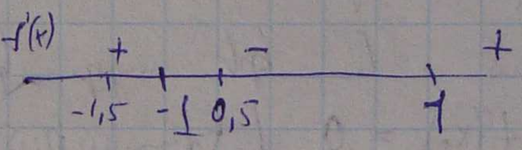
Եթե նշված - -ից + է անցնում x_0, ապա $x = x_0$ կետում ֆ-ն ունի min,

$$y_{min} = y(x_0) = f(x_0)$$

Օրինակ $y = x^3 - 3x + 4$

$y' = 3x^2 - 3 = 0$

$x = \pm 1$

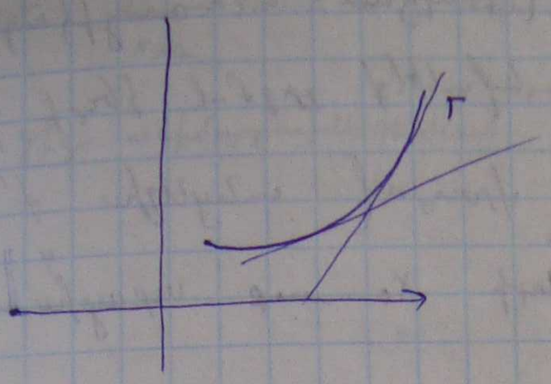


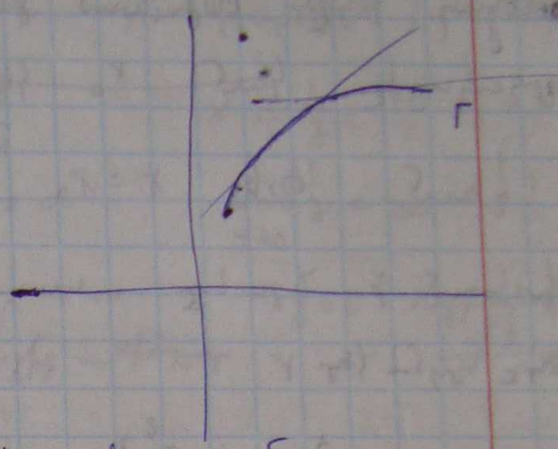
$x = -1$ max $y_{max} = y(-1) = 6$

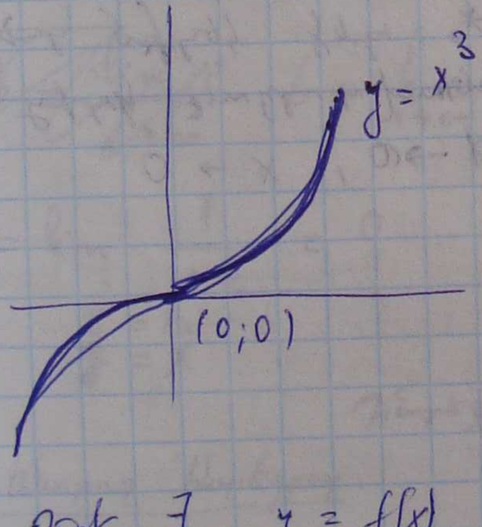
$x = 1$ min $y_{min} = y(1) = 2$

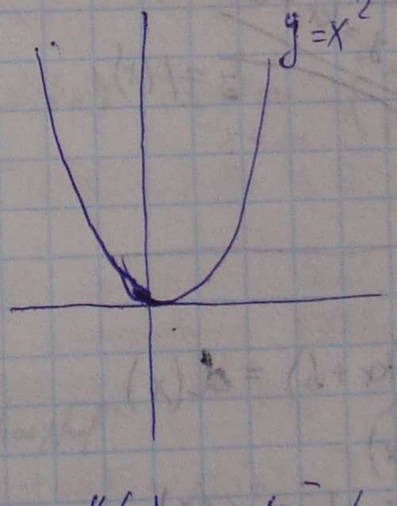
Ֆ-ի գրաֆիկի ուռուցիկության, ուռուցիկության ուղղությունը:

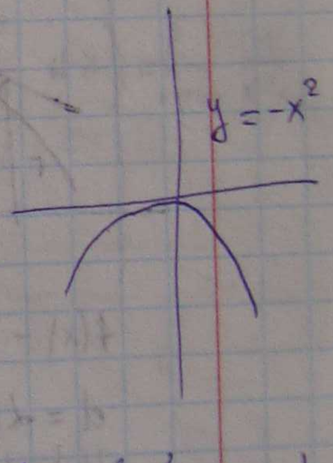
Սահմանում: $f(x)$ ֆ-ի գրաֆիկը x տրված միջակայքում ուռուցիկ է այդ միջակայքում, եթե այդ միջակայքի ցանկացած կետում տարված շոշափողից

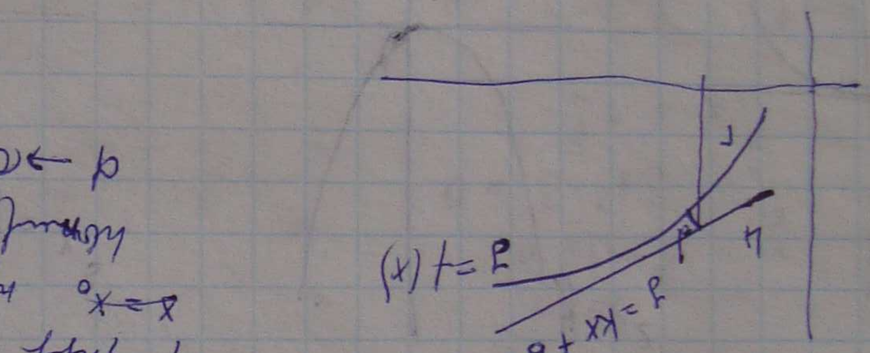





y = x^3
(0;0)


y = x^2


y = -x^2



$$f(x) - (kx+b) = \alpha(x)$$

$$d = \alpha(x)$$

$$f(x) - kx - b = \alpha(x)$$

$$\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} = \frac{\alpha(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx - b) = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)$$

$y = kx + b$ называется асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$), если $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$).

Если $k = 0$, то асимптота $y = b$ называется горизонтальной.

Если $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, то прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$.

Пример. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$.

Область определения: $x \neq \pm 2$, $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

$x = \pm 2$ — вертикальные асимптоты.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x^2-4)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3 - 4x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-4} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{x^2-4} = 0$$

$y = x$ — наклонная асимптота.

Пример. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{1}{x-2}$.

$x = 2$ — вертикальная асимптота.

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2} = \infty$$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x(x-2)} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

$y = 0$ — горизонтальная асимптота.

Пример. Найти асимптоты графика функции $y = \sin\frac{1}{x}$.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x} = 0$$

$y = 0$ — горизонтальная асимптота.

Пример. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$.

Область определения: $x \neq \pm 2$, $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

$x = \pm 2$ — вертикальные асимптоты.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x^2-4)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3 - 4x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-4} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{x^2-4} = 0$$

$y = x$ — наклонная асимптота.

Найти асимптоты графика функции $y = f(x)$ и построить график: $y = kx + b$ — наклонная асимптота.

Найти асимптоты графика функции $y = f(x)$ и построить график: $x = x_0$ — вертикальная асимптота.

Если $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, то прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$.

Пусть $d = d(x) \to 0$, $x \to 0$

Եթե եթե $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, ապա ուղիղ $x=a$ հանդիսանում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի ուղղահայաց ասիմպտոտ

$y = \frac{1}{x}$ $\quad x = \frac{1}{y}$

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$ $\quad \lim_{y\to 0} \frac{1}{y} = \infty$

$x = 0$ $\quad x \to \infty$

$y=0$ հորիզոնական ասիմպտոտ

ուղղահայաց ասիմպտոտ

$y = \frac{1}{x-2}$

$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2} = \infty$

$x = 2$ - ուղղահայաց ասիմպտոտ

$y = \frac{x^3}{x^2-1}$

1) ուղղահայաց ասիմպտոտ $x=-1, x=1$

2) թեք ասիմպտոտներ $y = kx + b$

$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim \frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x} =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$

$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1} =$

$= \lim \frac{1}{x - \frac{1}{x}} = 0$

$y = kx + b$

$y = x$

Նախնական ֆունկցիա

Անորոշ ինտեգրալ

Ֆ-ն f-ի նախնական է $(a;b)$-ում, եթե F-ը դիֆերենցելի է $(a;b)$-ում և $F'(x) = f(x)$ ամեն $x \in (a;b)$ համար:

Օրինակներ:

$F(x) = x^3$ $\quad F'(x) = 3x^2 = f(x)$

$F(x) = \sin 2x$ $\quad F'(x) = 2\cos 2x = f(x)$

ապա F-ը f-ի նախնական ֆունկցիա է:

օրինակ՝ $f(x) = 3x^2$ ֆ-ի համար, որովհետև $F(x) = x^3$ ֆ-ն,
որի ածանցյալը հավասար է $F'(x) = f(x)$

$f(x) = 2\cos 2x$ $F(x) = \sin 2x$ $F'(x) = f(x)$

$F(x)$ -ը x փոփոխականի կոնկրետ $f(x)$ ֆ-ի նախնական կամ, պարզ x փոփոխականի որևէ միջակայքում $F'(x) = f(x)$.

Եթե $F_1(x)$ -ը և $F_2(x)$ -ը $f(x)$ 2 նախնական ֆունկցիաներ են, ապա միևնույն միջակայքում են հավասարությունը

$$F_1(x) - F_2(x) = C$$

$F_1'(x) = f(x)$
$F_2'(x) = f(x)$ $\Rightarrow F_1'(x) - F_2'(x) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (F_1(x) - F_2(x))' = 0 \Rightarrow F_1 = F_2 + C$

Այսպես է, որ նախնական ընդհանուր տեսքը է՝
$F(x) + C$, $C \in R$

Սահմանում: Եթե $F(x)$ -ը $f(x)$ ֆ-ի նախնական ֆունկցիա է, ապա $F(x) + C$ նախնական ֆունկցիաների բազմությունը կոչվում է $f(x)$ ֆ-ի անորոշ ինտեգրալ և գրվում է՝

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad (1)$$

$f(x)$ - ինտեգրալի ֆունկցիան է ֆ-ում
$f(x)dx$ - ինտեգրալի ֆունկցիան արտահայտությունը
$\int$ „$\int$" - ինտեգրալ է կոչվում

Եթե $f(x)$ ֆ-ն անընդհատ է, ապա (1) հնարավոր է
ապ:
Ար

Пример $\int 3x^2 dx = x^3 + c$

$\int 2\cos 2x\, dx = \sin 2x + c$

$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + c$

Основные свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$

$(F(x)+c)' = F'(x) = f(x)$

2. $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$

3. $\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = \int d\,F(x) = F(x)+c$

$\int d\,F(x) = F(x) + c$

4. $\int A\, f(x)\,dx = A\int f(x)\,dx$

5. $\int (f(x) \pm \varphi(x)) = \int f(x)\,dx \pm \int \varphi(x)\,dx$

6. Если $F(x)$ – одна из первообразных для $f(x)$ на промежутке X, то $\int f(x)\,dx = F(x)+c$

Следствия а) $\int f(kx)\,dx = \frac{1}{k}F(kx)+c$

б) $\int f(x+b)\,dx = F(x+b)+c$

в) $\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+c$

Примеры. $\int \cos x\,dx = +\sin x + c$

$\int \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+c$

$\int \cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)dx = \frac{1}{3}\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)+c$

$\int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\sin 3x + c$

Таблица производных и интегралов

1. $c' = 0$
2. $x' = 1$
3. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $\int\int \left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\right)' = x^{\alpha-1}$
4. $(\sin x)' = \cos x$
5. $(-\cos x)' = \sin x$
6. $(\operatorname{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2 x}$
7. $(-\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$.
8. $\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x$
9. $(e^x)' = e^x$
10. $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(-\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
14. $(-\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

1. $\int 0\,dx = c$
2. $\int 1\,dx = x + c$
3. $\int x^\alpha dx = \int x^{\alpha-1} dx = \frac{x^\alpha}{\alpha} + c$
4. $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
6. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$
8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
9. $\int e^x dx = e^x + c$
10. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c = -\arccos x + c$
12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c = -\operatorname{arcctg} x + c$
13. $\int \operatorname{tg}(x)\,dx = -\ln|\cos x| + c$
14. $\int \operatorname{ctg}(x)\,dx = \ln|\sin x| + c$
15. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$

17. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}$
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} =$

Найти $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

$\int x^{-1} dx =$

$\int \frac{1}{\cos^2 3x} dx =$

$\int 2^{3x} dx$

1. Интегрирование

$\int \frac{d\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg}}$

$\int \frac{dx}{\arcsin x}$

2. Интегрирование

$\int f(x)\,dx$

$x = \varphi(t)$

$F'(x) = f(x)$

1. $\int 0\,dx = c$

2. $\int 1\,dx = x + c$

3. $\int x^{\alpha}\,dx = \int x^{\alpha-1}\,dx = \frac{x^{\alpha}}{\alpha} + c$

4. $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

6. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$

8. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

9. $\int e^x\,dx = e^x + c$

10. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$

11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$
$= -\arccos x + c$

12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c = -\operatorname{arcctg} x + c$

13. $\int \operatorname{tg}(x)\,dx = -\ln|\cos x| + c$

14. $\int \operatorname{ctg}(x)\,dx = \ln|\sin x| + c$

15. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$

17. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + c$

Օրինակ. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^1}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2} + c$

$\int x^{\alpha-1}\,dx = \frac{x^{\alpha}}{\alpha}, \quad \alpha \neq 0$

$\int \frac{1}{\cos^2 3x}\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x + c$

$\int 2^{3x}\,dx = \frac{2^{3x}}{3\ln 2} + c$

Անորոշ ինտեգրալի հատկությունները

1. Հաստատուն արտադրիչը կարելի է դուրս հանել ինտեգրալի նշանից - $\int \frac{1}{\cos^2 4x}\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{tg} 4x + c$

$\int \frac{d\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg} x} = \ln|\operatorname{arctg} x| + c$

$\int \frac{dx}{\operatorname{arcsin} x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d\operatorname{arcsin} x}{\operatorname{arcsin} x} = \ln|\operatorname{arcsin} x| + c$

2. Գումարի ինտեգրալը հավասար է գումարելիների ինտեգրալների գումարին

$\int f(x)\,dx$

$x = \varphi(t)$ $\quad F(\varphi(t))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$

$F'(x) = f(x)$ $\quad \int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dx = F(\varphi(t)) + c = F(x) + c$

$\int \sqrt{1+5x}\,dx = \int t\,\frac{2}{5}t\,dt = \frac{2}{5}\int t^2 dt = \frac{2}{5}\,\frac{t^3}{3} + c =$

$= \frac{2}{15}(\sqrt{1+5x})^3 + c$

$1+5x = t^2$

$x = \frac{1}{5}(t^2-1)$

$dx = \frac{2}{5}t\,dt$

$\int \frac{dx}{\sin^2(\frac{3}{2}x+4)} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{2}{3}\operatorname{ctg}t + c = -\frac{2}{3}\operatorname{ctg}(\frac{3}{2}x+y)+c$

$\frac{3}{2}x + 4 = t$

$3x = 2t - 8$

$x = \frac{1}{3}(2t-8)$

$dx = \frac{2}{3}dt$

3. Интегрирование по частям

Пусть u и v – дифференцируемые функции. Тогда $\int u\cdot dv = uv - \int v\cdot du$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\int (uv)'dx = \int u'v\,dx + \int uv'dx$

$\int d(u,v) = \int v\,du + \int u\,dv$

$uv = \int v\,du + \int u\,dv$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (1) Интегрирование по частям

$\int xe^x dx = \int v\,de^x \Big| \begin{matrix} u = x \\ v = e^x \end{matrix} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$

$\int x\cos x\,dx$

$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}} =$

$= \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$

$\cos x =$

$\sin x = \sin$

$\sin x =$

$\int R(\cos x,$

Универсальная тригонометрическая подстановка

$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$

$\int \sin mx\,dx$

$\int \sin mx$

$\int \cos mx$

$\int x\cos x\,dx = \int x\,d(\sin x) \Big|\begin{matrix} = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C \\ U = x \\ V = \sin x \end{matrix}$

Тригонометрик функцияларнинг кўпайтмасини йиғиндига келтириш

1. $\int \sin mx \cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x)\,dx$

$\int \sin mx \sin nx\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)\,dx$

$\int \cos mx \cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)\,dx$

Мисол $\int \sin 2x \cos 5x\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin 7x - \sin 3x)\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 7x}{7} + \frac{\cos 3x}{3}\right) + C$

II. $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$

универсал алмаштириш

$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$

$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \qquad x = 2\operatorname{arctg} t \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$ (2)

$\cos x = \cos 2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\right) =$

$= \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ (3)

$\sin x = \sin 2\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} \cdot \cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$

$\sin x = \frac{2t}{1+t}$ (4)

$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int R_1(t)\,dt$

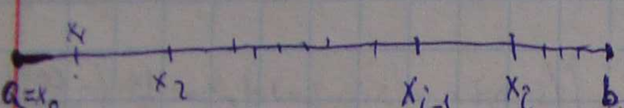
Օրինակ $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c$

Որոշյալ ինտեգրալ

Որոշյալ ինտեգրալի գաղափարին բերող խնդիրներ: Որոշյալ ինտեգրալ

1. փոփոխական ուժի կատարած աշխատանքը

$A = \bar{F} \cdot \bar{S}$



Նյութական F ուժի կատարած աշխատանքը, երբ նյութական կետը a-ից տեղափոխվում է b: AB հատվածը կամայական եղանակով տրոհենք n մասերի: Ընդունենք հետևյալ նշանակումները

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$\lambda = \max\{\Delta x_i,\ i = 1, 2, \dots n\}$

Δx_i տրված հատվածի կամայական $\bar{c}_i$ (կամ ξ_i) կետ

$x_{i-1} \le \bar{c}_i \le x_i$

$F = F(\bar{c}_i)$

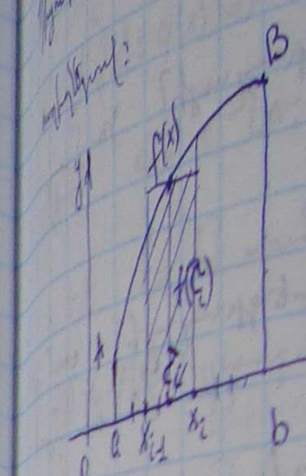
Δx_i տրված F_i ուժագործի հաստատուն ու նրան հավասար $h = \bar{c}_i$ կետում ունեցած ուժին:

Այդ դեպքում Δx_i տրված $\Delta A_i = F(\bar{c}_i)\,\Delta x_i$

Ըստ հավելման A - ին

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} F(\bar{c}_i)\,\Delta x_i$$

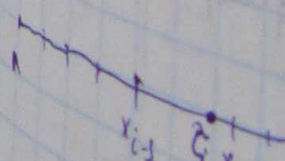
$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\bar{c}_i)\,\Delta x_i \quad (1)$$



$\Delta S_i = f(\bar{c}_i)\,\Delta$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$ =

$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n}$

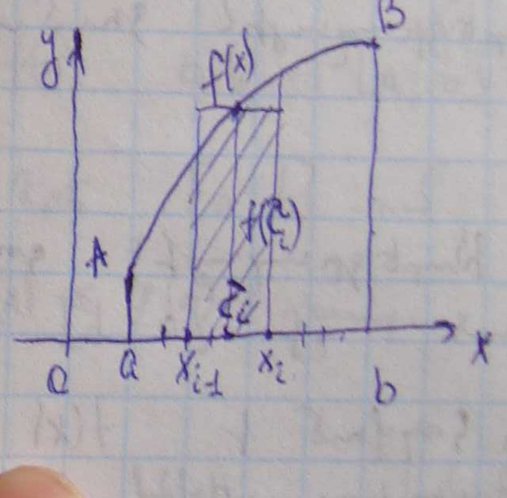


$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$\lambda = \max\{\Delta$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c$$



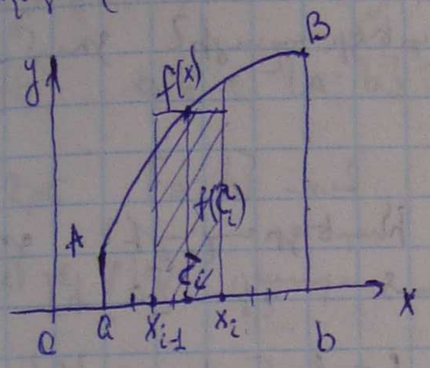
$$S_i = f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)$$

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta$$

Դիտարկենք սեղանի տեսքերեր հարցումը:

Դիցուք կոորդինատների սիստեմում տրված է $y = f(x) > 0$ ֆունկցիան $y = 0$ $x = a$, $x = b$ ուղիղներով:



aABb

ab -ի դրական մասը

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$\lambda_{max} \{\Delta x_i\}$

$$\Delta S_i = f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

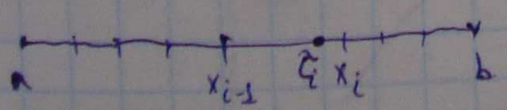
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \quad (2).$$

Կորի խնդրում ֆունկցիան ընդհատ է եղել հատվածում:
Դիցուք $y = f(x)$ -ը որոշված է $[a; b]$ -ում և արժեքները

n տարբեր

$x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$



$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$\lambda = max \{\Delta x_i\}$

ընդ որում $f(x)$ -ը կարող է ընդունել $f(\xi_i)$ արժեքը

مجموع $f(\xi_i)\,\Delta x_i$ وسمي حد المجموع التكاملي

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \quad (3)$$

(3) - ل مطلوب عندما $f(x)$ غير محدود على $[a;b]$ وسمي

ب محدود على:

تعريف: $f(x)$ غير محدود على $[a;b]$ نسمي T_n المجموع التكاملي عندما $\lambda \to 0$ ، حيث λ أطول Δx_i لـ i $[a;b]$ - من n تقسيم عشوائي نقاط ξ_i أطول

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \quad (4)$$

نعرف $f(x)$ ب - متكاملة $\Leftarrow$ يوجد (4) مطلوب عندما

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

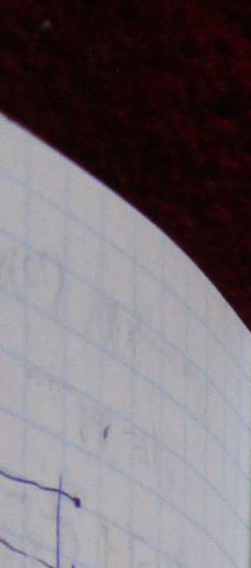
$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

$$f(x) < 0 \qquad S = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|$$

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

أ = $\int_a^b F(x)\,dx$

مثال: احسب مساحة الشكل المحدود بالمنحنى $y = x^2$ والمستقيمين $x = 0$ و $x = 2$ ومحور الفواصل.



Որոշյալ ինտեգրալի հատկությունները:

1. $\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$

2. $\int_a^b \big(f(x) \pm \varphi(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b \varphi(x)\,dx$

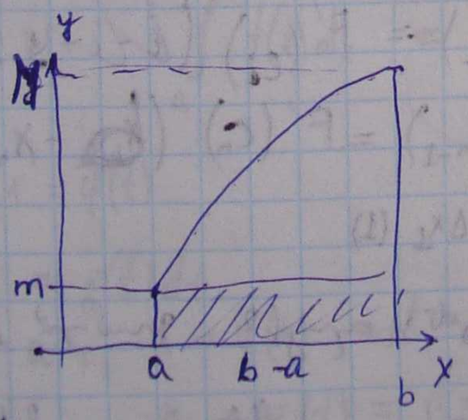
3. ~~եթե~~ եթե $[a;b]$-ում $f(x) \geq 0$, ապա $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

4. եթե $[a;b]$-ում $f(x)$ և $\varphi(x)$ ֆ-ներ բավարարում են $f(x) \leq \varphi(x)$, ապա $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \varphi(x)\,dx$

5. եթե $f(x)$-ը անընդհատ է $[a;b]$-ում և $c \in [a;b]$, ապա
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

6. եթե $f(x)$-ը անընդհատ է $[a;b]$-ում և m, M $f(x)$-ի ֆունկցիայի ճշգրիտ եզրերն են $[a;b]$ հատվածում, ապա տեղի ունի ~~$m(b-a)$~~
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$ (տրոհելի)

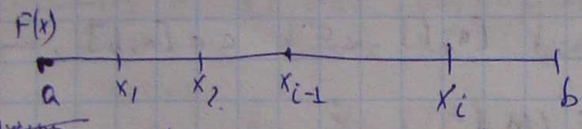
Հնդրկյա ինտեգրալի երկրաչափական մեկնաբանությունը:



Նյուտոն - Լայբնիցի բանաձև:

Թեորեմ: Եթե $F(x)$ ֆ-ն $[a;b]$-ում $f(x)$-ի ինտեգրելի է $F'(x)=f(x)$, ապա $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$ (Նյուտոն-Լայբնիցի բ.)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$



$[x_{i-1};x_i]$-ի համար հետևյալ հավասարությունը ճիշտ է

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(c)$$

$$F(b)-F(a) = f(c)(b-a)$$

$$\begin{cases} [a;x_1] & F(x_1)-F(a) = F'(c_1)(x_1-a) = f(c_1)\Delta x_1 \\ [x_1;x_2] & F(x_2)-F(x_1) = F'(c_2)(x_2-x_1) = f(c_2)\Delta x_2 \\ [x_{i-1};x_i] & F(x_i)-F(x_{i-1}) = F'(c_i)(x_i-x_{i-1}) = f(c_i)\Delta x_i \\ [x_{n-1};b] & F(b)-F(x_{n-1}) = F'(c_n)(b-x_{n-1}) = f(c_n)\Delta x_n \end{cases}$$

$$F(b)-F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \quad (1)$$

(1)-ը $f(x)$ ֆ-ի ինտեգրալային գումարն է $[a;b]$-ում

Որտեղից (1) գումարի սահմանն երբ $\max\Delta x\to 0$-ում

$$\lim_{\max\Delta x\to 0}[F(b)-F(a)] = \lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

$F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$

Թեորեմ: Եթե $f(x)$-ը սահմանված [illegible] x_0 [illegible]

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx =$$

Կիրառություն: Եթե $F(x)$ [illegible] $f(x)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)$$

Օրինակ $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\,dx = -\frac{\cos 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

[illegible] [illegible]

[illegible] f $\int_a^b f(x)\,dx =$

Եթե $x=\varphi(t)$

$dx = \varphi'(t)\,dt$

եթե $x=a$; $a=\varphi(t)\Rightarrow t=\alpha$

$x=b$; $b=\varphi(t)=t=\beta$

[illegible] α-ից β-ն

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Թեորեմ Նյուտոն Լայբնիցի բանաձև (հիմնական թեորեմ)

Եթե $f(x)$ -ը անընդհատ է $[a;b]$ -ում, այդ դեպքում $(a;b)$ -ում գտնվի այնպիսի x_0 կետ որ կատարվի հետևյալ

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)(b-a)$$

Ապացույց: Եթե $F(x)$ -ը $f(x)$ ֆունկցիայի կամայական, ապա

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \overset{\text{Լագրանժի թեորեմ}}{=} F'(x_0)(b-a) = f(x_0)(b-a)$$

Օրինակ $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\cdot 1^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\cdot 0^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\,dx = -\frac{\cos 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\left(\frac{\cos 2\cdot\frac{\pi}{4}}{2} - \frac{\cos 2\cdot 0}{2}\right) = -\left(0 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Որոշյալ ինտեգրալում փոփոխականի փոխարինման և մասերով ինտեգրման բանաձևերը

որոշյալ ինտեգրալում

Նախորդ $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$.

Եղ. $x = \varphi(t)$

$dx = \varphi'(t)\,dt$

Եթե $x = a$; $a = \varphi(t) \Rightarrow t = \alpha$ այդ դեպքում $t \in [\alpha;\beta]$

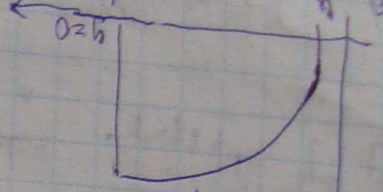
$x = b$; $b = \varphi(t) = t = \beta$

Հետևություն Եթե u և v β -անդ հետևյալ $[a;b]$ -ում

$$= 2e^2 - e - e^x\Big|_1^2 = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

1. $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$



$$S = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\psi(t) \geq 0)$$

Пример. $\int_0^{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4\sin^2 t} \cdot 2\cos t\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt =$

$x = 2\sin t \quad 0 = 2\sin t \quad \sin t = 0 \quad t = 0$

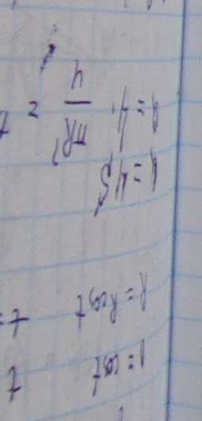
$dx = 2\cos t\,dt \quad 2 = 2\sin t \quad \sin t = 1 \quad t = \frac{\pi}{2}$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \overline{2\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\frac{\pi}{2} + \sin\frac{2\cdot\frac{\pi}{2}}{2}\right)}$$

Интегрирование по частям

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

Пример $\int_1^2 xe^x\,dx = \int_1^2 x\,de^x \Big|_{\substack{u=x \\ v=e^x}} = xe^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx =$



$$S = \int_\alpha^\beta y(t)\,dt$$

$x = R\cos t \quad t = 0$

$y = R\sin t \quad t = \frac{\pi}{2}$

$dx = -R\sin t\,dt \quad t = \beta$

$$= -R^2\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t\,dt = -R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}dt = \left|\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{2} \\ t = 0 \end{array}\right| = \frac{R}{2}$$

$$A = \frac{1}{4}S \qquad \frac{\pi R^2}{4} = \frac{1}{4}\cdot\pi R^2$$

Օրինակ.

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$

$x = 2\sin t$ $\quad 0 = 2\sin t \quad \sin t = 0 \quad t = 0$

$dx = 2\cos t\,dt$ $\quad 2 = 2\sin t \quad \sin t = 1 \quad t = \frac{\pi}{2}$

$$= 2\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}}{2}\right)$$

Երկ. ածանցվ. u և v

$$\int u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

Օրինակ

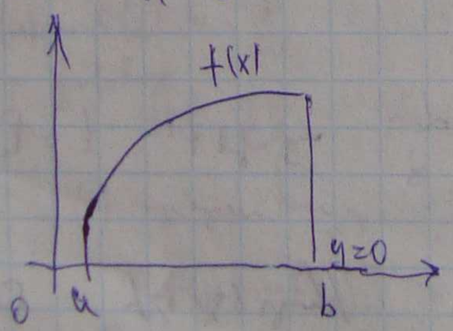
$$\int_1^2 xe^x\,dx = \int_1^2 x\,de^x \Big|_{\substack{u=x \\ v=e^x}} = xe^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x\,dx =$$

$$= 2e^2 - e - e^x\Big|_1^2 = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2$$

Պրոշման հնդրցրած երկրաչափական իմաստը

Կոորդինատ հարթություն

1.

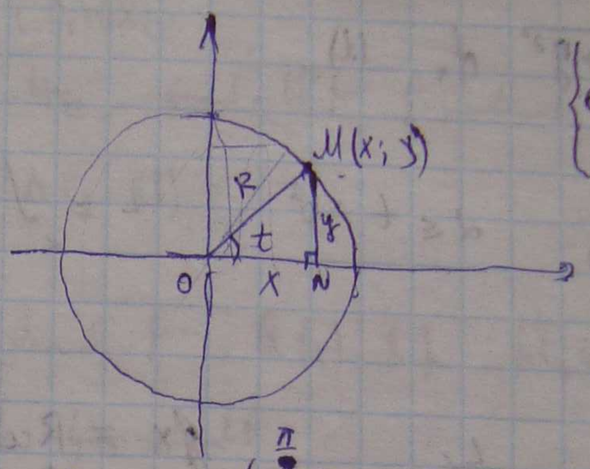


$$S = \int_a^b f(x)\,dx \quad (1)$$

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \text{(պահ)}$$

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\, y'(t)\, dt$$

$x^2 + y^2 = R^2$ πR^2.



$$\begin{cases} y = R\sin t \\ x = R\cos t \end{cases}$$

$\alpha = 0 \le t \le \frac{\pi}{2} = \beta$

$$S = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\sin t \cdot (-R\sin t)\, R\sin t\, dt =$$

$$= -R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt = -R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt = -\frac{R^2}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$0 = \cos t \quad t = \frac{\pi}{2}$

$R = R\cos t \quad t = 0$

$$= \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}}{2}\right)^{0} = \frac{\pi R^2}{4}$$

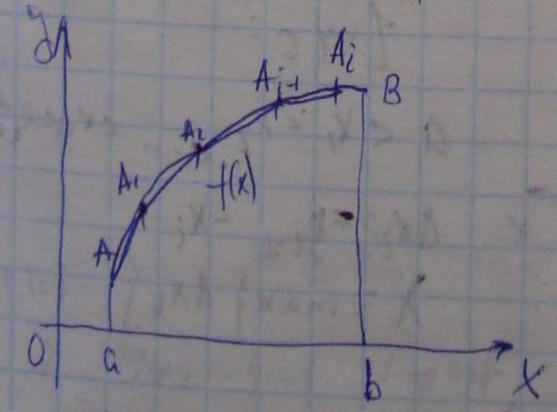
$Q = 4S$

$Q = 4 \cdot \frac{\pi R^2}{4} = \pi R^2$

2. Կորի աղեղի երկարությունը

$[a;b]$-ում սահմանված և $f(x)$-ի գրաֆիկ: Պարզեցնենք և գտնենք $L = \overset{\frown}{AB}$

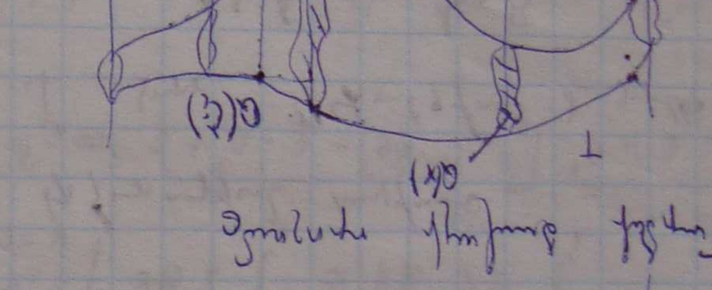
$AA_1A_2 \dots A_{n-1}B$



→ S 0-ի:

AB աղեղի երկարությունը սահմանվում է AB աղեղին ներգծված $AA_1A_2 \dots A_{n-1}B$ բեկյալի երկարության սահմանը երբ կողմերից ամենամեծի երկարությունը

Цилиндрическая поверхность



Пусть f задана на $[a,b]$.

Разобьем $[a,b]$:

$a < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < b$

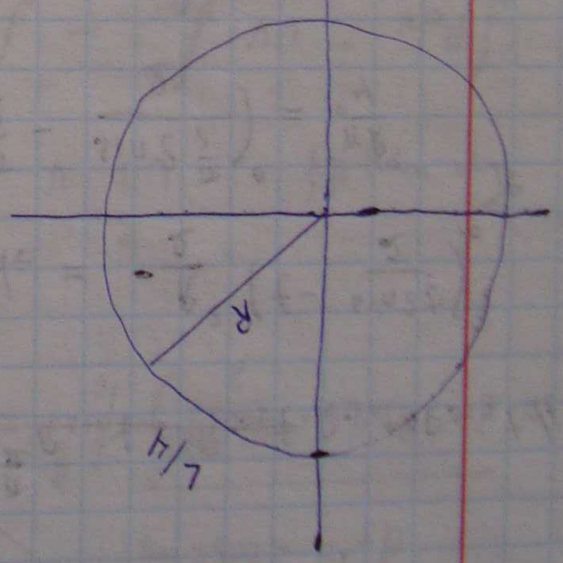
$\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$

$\lambda = \max\{\Delta x_i\}$ $i = 1,2,\dots,n$

Δx_i - мы обозначили длины ξ_i взяли:

Δx_i была длина i-ой элементарной дуги цилиндрической поверхности с образующей длины Δx_i:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta \qquad L = \int_\alpha^x \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt \qquad (2)$$



$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

$$\dot{x} = -R\sin t$$
$$\dot{y} = R\cos t$$

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}\, dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\, dt = 4Rt \Big/_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi R$$

Объем. тела

$$V = \int_a^b \alpha(x)\, dx$$

$$V_n = \frac{1}{3} S$$

Ունենք գծագրում $\Delta V = Q(\xi_i)\Delta x_i$

տրված հատվածը V -ն է. ցանկացած եղանակով V_n -ը

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\,\Delta x_i \quad (1)$$

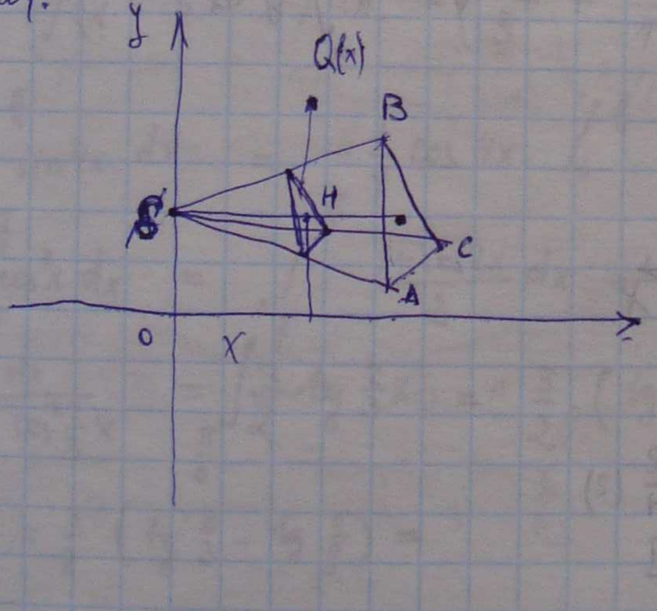
Եթե ֆունկցիան ինտեգրելի է $Q(x)$ -ը կոչվում է ինտեգրալային գումար

Երբ ոչ մեկ հատվածը չի ձգտում զրոյի

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\,\Delta x_i \quad (2)$$

$$V = \int_a^b Q(x)\,dx \quad (3)$$

Օրինակ.



$$\frac{Q_x}{S_{ABC}} = \frac{x^2}{H^2}$$

$$Q_x = \frac{x^2}{H^2} S(H)$$

$$V = \int_0^H \frac{x^2}{H^2} S\,dx =$$

$$= \frac{S}{H^2} \int_0^H x^2\,dx =$$

$$= \frac{S}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^H = \frac{S}{H_2} \frac{H^3}{3} =$$

$$= \frac{1}{3} SH$$

Ա. պրիզմայի հիմքի մակերեսը հավասար է պրիզմայի բ.

Qայդ դեպքում $\Delta V = Q(\xi_i)\Delta x_i$

որտեղ ξ_i կամայական կետ է Δx_i հատվածից։ Ընդհանուր դեպքում V_n -ը

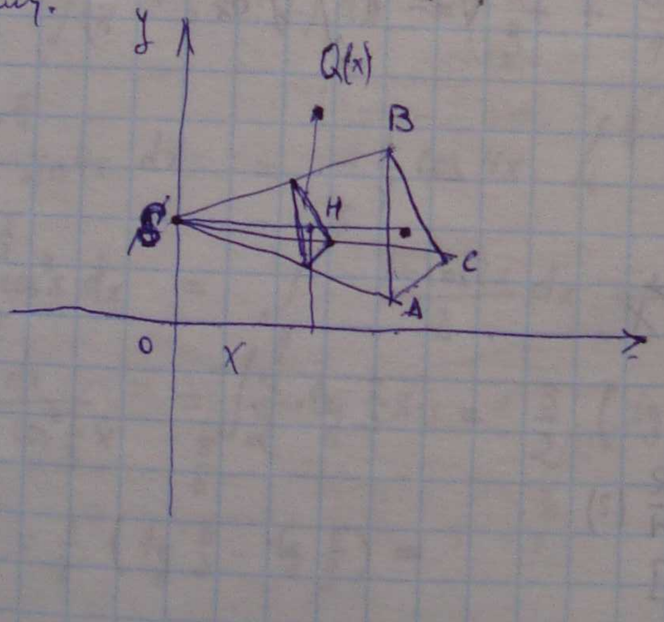
$$V_n = \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\,\Delta x_i \quad (1)$$

Հետևաբար հրթիռի ճեղքած ծավալը և $Q(x)$ ֆունկցիայի ինտեգրալային գումարի միջև անհամասեռ կապ

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\,\Delta x_i \quad (2)$$

$$V = \int_a^b Q(x)\,dx \quad (3)$$

Օրինակ.



$$\frac{Q_x}{S_{հիմք}} = \frac{x^2}{H^2}$$

$$Q_x = \frac{x^2}{H^2} S(H)$$

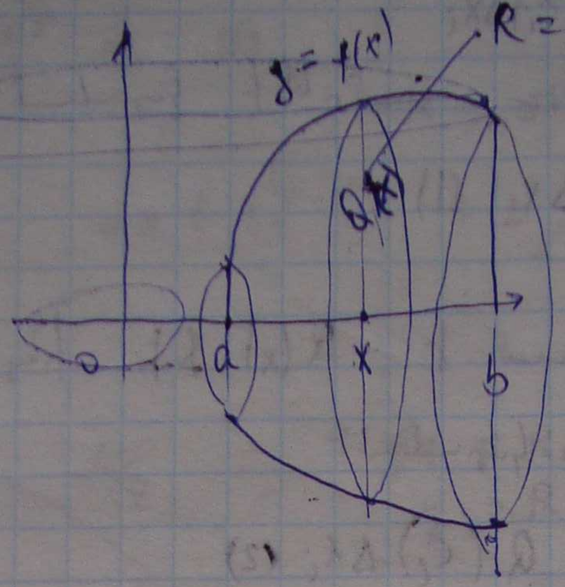
$$V = \int_0^{H_2} \frac{x^2}{H^2} S\,dx =$$

$$= \frac{S}{H^2} \int_0^H x^2\,dx =$$

$$= \frac{S}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^H = \frac{S}{H_2}\,\frac{H^3}{3} =$$

$$= \frac{1}{3} SH$$

Ա. պրոբլեմ ճեղքի ծավալը պրիզմայի և պրիզմայի մ.



$Q(x) = \pi R^2 = \pi y^2$ (S).

$V_{ox} = \int_a^b \pi R$

$V_{ox} = \pi \int_a^b y^2 dx$ (6).

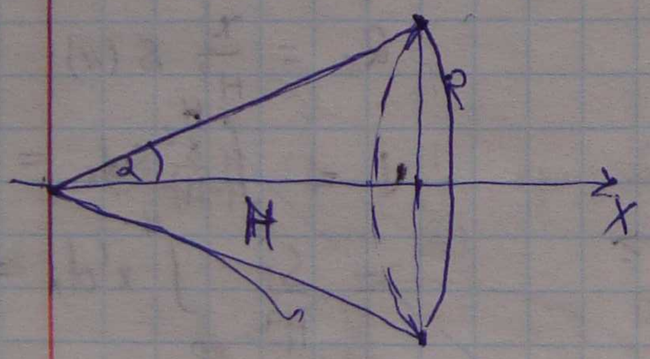
$V_{oy} = \pi \int_c^d x^2 dy$.

Однако в нашем Н, а R, и поэтому получилась такая

аргументу неудобно будет брать:

y ↑

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

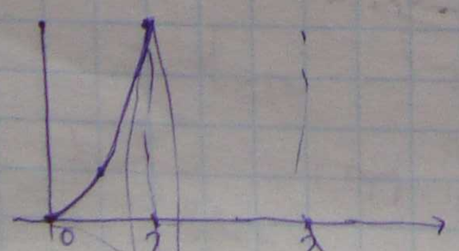


$y = kx$ (1) $\quad k = tg\,\alpha = \frac{R}{H}$ (2)

$y = \frac{R}{H} x \qquad [0; H]$

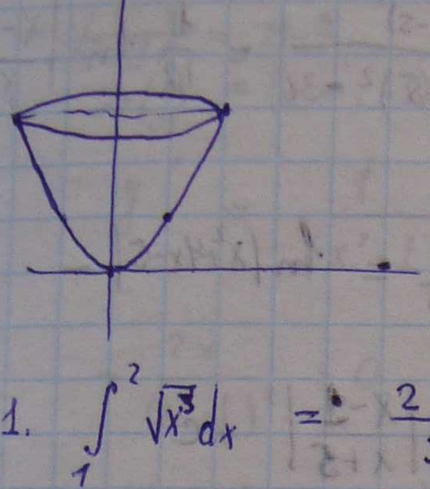
$$V = \pi \int_0^H \frac{R^2}{H^2} x^2 \, dx = \frac{\pi R^2}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \frac{\pi R^2}{H^2} \cdot \frac{H^3}{3} = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

Пример $y = x^2 \quad [0; 2]$



$$V = \pi \int_0^2 x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \pi \frac{32}{5}$$

$[0; 4]$ $\quad X = \sqrt{y}$



$$V = \pi \int_0^4 y\, dx = \pi \frac{y^2}{2} \Big|_0^4 = 8\pi$$

1. $\int_1^2 \sqrt{x^3} dx = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} \Big|_1^2 = \frac{2 \cdot 2^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2^{\frac{7}{2}} - 2}{5}$

2. $\int_2^3 \left(x^2 + \frac{3}{2}x + 1\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{4} + x\right) \Big|_2^3 = 9 + \frac{27}{4} + 3 - \frac{8}{3} + 3 - 2$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x\, dx = -\frac{1}{4} \cos 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{4} \cos\pi + \frac{1}{4} \cos 0 = \frac{1}{2}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 0 = \frac{\pi}{4}\right.$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 \frac{2}{3}x} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{2}{3}x = \frac{3}{2}\left(\operatorname{tg} \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{2} - \operatorname{tg} \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{6}\right) =$

$= \frac{3}{2}\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{9}\right) =$

1.12. б) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+2} dx = \ln |x^2 - 3x + 2| + C$

1.10. б) $\int \frac{5\sqrt{\ln x}}{x} dx = 5 \int (\ln x)^{\frac{1}{2}} d \ln x = 10 \frac{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$

7.2. а) $y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$

$y' = \frac{dy}{dx} = \arcsin x + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x)$

$$\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = -\operatorname{ctg} x - x + c$$

$$\sh x \quad \ch x \quad \th x \quad \cth x$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x-11)} = \int \frac{dx}{x^2 - 10x - 11} = \int \frac{d(x-5)}{(x-5)^2 - 36} = \frac{1}{12} \ln \left| \frac{x-11}{x+1} \right| + c$$

$$\int \frac{2x+3}{x^2+4x-5}\,dx = \int \frac{(2x+4)dx}{x^2+4x-5} - \frac{dx}{x^2+4x-5} = \ln|x^2+4x-5| -$$

$$- \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2-9} = \ln \left| x^2+4x-5 \right| - \frac{1}{6} \cdot \ln \left| \frac{x-1}{x+5} \right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}} = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{9}{4} - \left(x+\frac{1}{2}\right)^2}} = \arcsin \left(\frac{2x+1}{3} \right) + c.$$

$$y = x^3 - 3x^2 + 4$$

$$D(y) = R$$

$$y' = 3x^2 - 6x \;/ = 0$$

$$x = 0$$

$$x = 2$$

$$y_{max} = y(0) = 4$$

$$y_{min} = y(2) = 0$$

$$y'' = 6x - 6 \;/ = 0$$

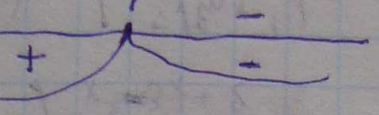
$y'' > 0$ вверх

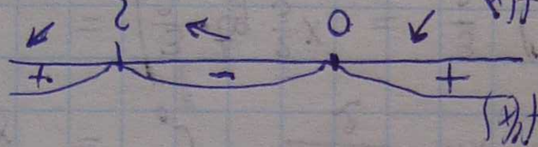
$6x - 6 > 0 \Rightarrow x \in (1; +\infty)$

$y'' < 0$ – выпуклый

$6x - 6 < 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 1)$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 1$ – точка перегиба





$$\int ctg^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = -ctgx - x + c$$

sh_x ch_x $h tg x$ $h ctg x$

015. 5. $$\int \frac{dx}{(x+1)(x-11)} = \int \frac{dx}{x^2-10x-11} = \int \frac{d(x-5)}{(x-5)^2-36} = \frac{1}{12} \ln\left|\frac{x-11}{x+1}\right| + c$$

$$\int \frac{2x+3}{x^2+4x-5}\,dx = \int \frac{(2x+4)dx}{x^2+4x-5} - \frac{dx}{x^2+4x-5} = \ln|x^2+4x-5| -$$

$$- \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2-9} = \ln|x^2+4x-5| - \frac{1}{6}\cdot \ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-\left((x+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}\right)}} = \int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{9}{4} - (x+\frac{1}{2})^2}} = \arcsin\left(\frac{2x+1}{3}\right) + c.$$

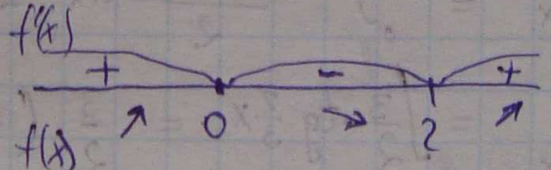
$$y = x^3 - 3x^2 + 4$$

$D(y) = R$

$y' = 3x^2 - 6x \;/ = 0$

$x = 0$

$x = 2$



$x = 0$ – точка max

$x = 2$ – точка min

$y_{max} = y(0) = 4$

$y_{min} = y(2) = 0$

$y'' = 6x - 6 \;/ = 0$

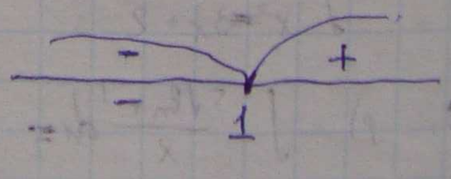
$y'' > 0$ – вогнутость

$6x - 6 > 0 \Rightarrow x \in (1; +\infty)$

$y'' < 0$ – выпуклость

$6x - 6 < 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 1)$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 1$ – точка перегиба



$M_0(1;2)$

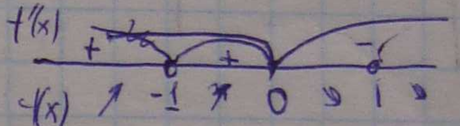
$y = \frac{1}{x^2-1}$

1) $D(y) = (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$

$$y' = -\frac{1}{(x^2-1)^2} \cdot 2x \quad / = 0$$

$y' \geq 0$ ↑
$y' \leq 0$ ↓

$$-\frac{2x}{(x^2-1)^2} \geq 0$$



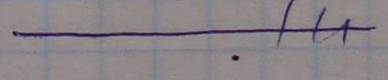
$x \in (-\infty;-1) \cup (-1;0]$

$(-\infty;-1) \cup (-1;0]$ ↑

$[0;1) \cup (1;+\infty)$ ↓

$y_{max} = y(0) = -1$

$$y'' = \frac{\cdots}{(x^2-1)^4}$$



$y'' > 0$ գոգավոր
$y'' < 0$ ուռուցիկ

ա) ուղղահայաց ասիմպտոտ

$x^2-1=0 \Rightarrow x = \pm 1$

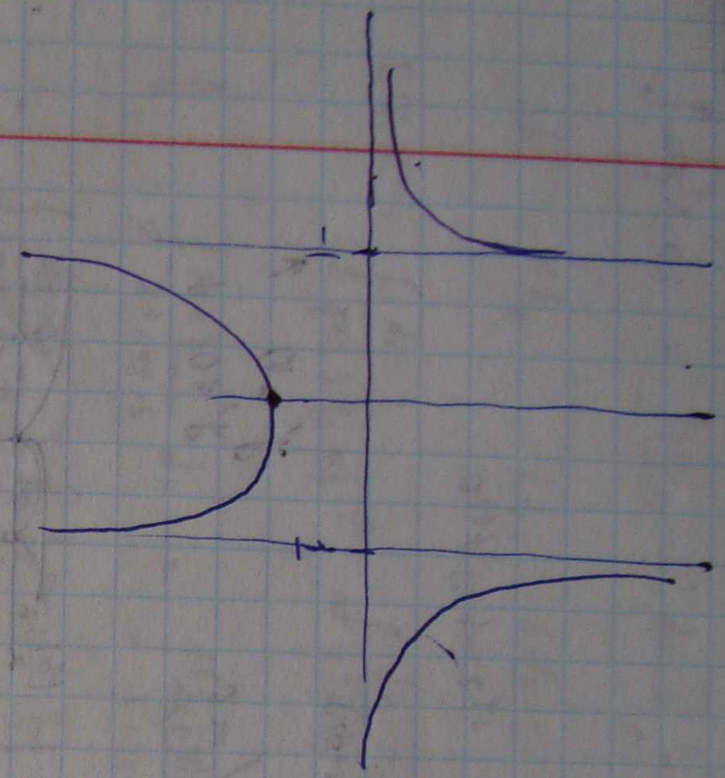
բ) թեք ասիմպտոտ

$y = kx + b$

$$k = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x^2-1)x} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (b(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2-1} = 0$$

$y = 0$



091 58 68 30

Zapisano 10 30

b71-1 1 - 12, - [illegible]

4 606782 000960

80Т5С1_2544 Тетрадь 80 л. Серия **"Ассорти"**. Класс "С". Изготовлено ООО "Хатбер-М". Москва, ул. Подольских Курсантов, 3, стр. 2
ГОСТ 13309-90. СЭЗ 77.08.01.546.П.12992.05.05
Оптовая продажа: (095) 105-1108 **www.hatber.ru**

мы делаем мир ярче!
www.jmi.ru wap.jmi.ru
отправь SMS с кодом на 4040
4042
JMI.RU

МОЛОДЕЖНЫЙ Отправь SMS на номер 4040

	МОНОФОНИЯ			
	ПОЛИФОНИЯ	NOKIA, LG SAMSUNG	SIEMENS	Motorola и др.
Britney Spears - Toxic	7677653	7677654	7677655	7677656
Justin Timberlake - Cry me a river	7677685	7677686	7677687	7677688
Prodigy - Girls	7677701	7677702	7677703	7677704
Жанна Фриске - Ла-ла-ла	7679446	7679447	7679448	7679449
Из к/ф - Mortal Combat	7679087	7679088	7679089	7679090
Подольская Наталья - Поздно	7679454	7679455	7679456	7679457
Тутси - Самый-самый	7677480	7677481	7677482	7677483
Шишков Ратмир - Не любишь	7677444	7677445	7677446	7677447
Из к/ф - "Джентельмены удачи"	76758174	76758171	76758172	76758173
Destiny's Child - Soldier	76759394	76759391	76759392	76759393
Placebo - Every you, every me	76759314	76759311	76759312	76759313
Алсу - Always on my mind	76759274	76759271	76759272	76759273
Жили у бабуси 2 весёлых гуся	76759424	76759421	76759422	76759423
Дима Билан - Ты должна рядом быть	76759124	76759121	76759122	76759123
Дискотека Авария - Если хочешь	76759434	76759431	76759432	76759433
Ленинград - Свобода	76759454	76759451	76759452	76759453
Валерий Меладзе - Салют, Вера!	7679956	7679957	7679958	7679959
Narcotic Thrust - I like it	7672287	7672288	7672289	7672290
Tarkan - Du-du	7679273	7679274	7679275	7679276
Ирина Дубцова - О нём	7671193	7671194	7671195	7671196
Ленинград - Музыка из к/ф "Бумер"	767250	767251	767252	767253
Мираж - Музыка нас связала	7676268	7676269	7676270	7676271
Из к/ф - Секс в большом городе	7676192	7676193	7676194	7676195
Мурка	7676598	7676599	7676600	7676601
Серёга - Чёрный бумер	7676288	7676289	7676290	7676291
Триплекс - Музыка из к/ф "Бригада"	7677292	7677293	7677294	7677295

© Первое музыкальное издательство, © БМГ Россия, © Ворнер/Чаппел (Москва), © ШнурОК, © Valentino, © Независимый Фонографический Альянс, © Продюсерский центр Игоря Матвиенко, © ЗАО «Си Ди Лэнд+»/ CD Land Records, 2004, © Издательство Джем, © Мэйстрим Продакшн, © Мегалайнер, © Независимое Агентство Авторских Прав, © Русский шансон, © EMI Music Publishing Ltd., © SBA Music Publishing Ltd. © Российское Авторское Общество. © ЗАО «Си Ди Лэнд+»/ CD Land Records, 2004 по исключительной лицензии ООО «Космонавт. Ру».

КАРТИНКИ Отправь SMS на номер 4040

7679270 7679279 7679280
- Siemens, Sony Ericsson, Samsung, (101x80 и 120x96) - Nokia (128x128)
76759886 76759887 76756166 76756167 76756186 76756187
76759896 76759897 76756176 76756177 76755346 76755347

КАРТИНКИ-ЛОГОТИПЫ на номер 4040
- Samsung, Nokia - Siemens - Motorola и др.
76759206 76759207 76759208 76759235 76759237 76759238 76759286 76759287 76759288

ИГРЫ Отправь SMS на номер 4042

FlightFight	Cop Crasher	Приключения альбо	Fire Fight	Diving Challenge
7672212	7672203	7675980	7672210	7672205

Модели телефонов для которых доступна Java-игра:
Nokia: 3100, 3108, 3120, 3200, 3300, 3560, 3600, 3620, 3650, 3660, 5100, 5140, 6010, 6100, 6108, 6200, 6220, 6230, 6620, 6630, 6650, 6660, 6670, 6800, 6810, 6820, 7200, 7210, 7250, 7250i, 7600, 8910i, 7610, 7650.

счастье есть на 9966
5 спецальных роликов 9 запчастей в продаже 6-ой кто не должно незабываемых покупок
отправь milk на 9966

молодежные знакомства
Для абонентов Москвы и МО стоимость исходящего SMS-сообщения: МТС - 0,118 USD с НДС, "МегаФон" - 0,127 USD с НДС, "Билайн" - 0,127 USD с НДС, входящие сообщения - бесплатно. Для абонентов региональных операторов подробности о стоимости смотрите на сайте www.jmi.ru

СУПЕР-ЗВУКИ Отправь SMS на номер 4042

Звук пилы	7677286
Мультяшки (Bang!)	7677287
Кукушка в часах	7677288
Канарейка	7677289
Ку-ка-ре-ку	7677290
Вой сирены	7677602
Блеяние овцы	7677603
Верещание дельфина	7677606
Выстрелы из "COLT-223"	7678646
Выстрел из "MAGNUM-357"	7678647
Случайный супер-звук	9999

Список телефонов, поддерживающих Супер-звуки: Nokia: 3200, 3220, 3300, 3600, 3620, 3650, 3660, 6100, 6220, 6170, 6230, 6260, 6600, 6620, 6630, 6650, 6670, 6680, 6810, 6820, 7200, 7260, 7270, 7280, 7600, 7610, 7650, 7710, 9300, 9500, N-Gage, N-Gage QD; Sony Ericsson: P908, T610, T616, T630, K750, P800, P900; Siemens: SL55, CL65, CX65, S65; Panasonic: GD-97; Motorola: E365, V220, V80; LG: F2100, G1800, G5600, L1100, T5100; Samsung: все полифонические модели, кроме A800, N600, N620, T500.

ВНИМАНИЕ! Для того, чтобы загрузить полифоническую мелодию, цветную картинку, супер-звук или Java-игру, Ваш телефон должен поддерживать технологию WAP или WAP-CPRS, а услуга WAP должна быть подключена у оператора. Для получения полифонической мелодии Ваш телефон должен поддерживать возможность загрузки и воспроизведения полифонических звонков. Подробная инструкция, полный список поддерживаемых моделей: www.jmi.ru, wap.jmi.ru. Служба поддержки – e-mail: support@mcom-mail.ru. Услуга считается оказанной в случае отправки любого SMS-сообщения на номера 4040, 4042, 9966. Для абонентов Москвы и МО стоимость исходящего сообщения на номер 4040: "Билайн" - 0,885 USD вкл. НДС, МТС - 0,885 USD вкл. НДС, "МегаФон" - 0,885 USD вкл. НДС, стоимость исходящего сообщения на номер 4042: "Билайн" - 2,35 USD вкл. НДС, МТС – 2,24 USD вкл. НДС, "МегаФон" – 2,36 USD вкл. НДС. Входящие сообщения - бесплатно. Для абонентов региональных операторов подробности о стоимости и процедуре предоставления услуги на сайте www.jmi.ru. Услуга предоставляется совместно с ООО "Инфорн-мобил". ОАО "Мобильные ТелеСистемы". Лицензии Минсвязи № 14485, 24136. ОАО "ВымпелКом". Лицензии Минсвязи № 23071. ЗАО "Сеник Дуо". Лицензии Минсвязи РФ №15002. ООО "Информ-мобил" (торговая марка jmi.ru). Лицензии Минсвязи РФ №23639.

ПОДАРОК ДРУГУ
ОТПРАВЬ ЛЮБУЮ МЕЛОДИЮ, КАРТИНКУ ИЛИ СУПЕР ЗВУК СВОЕМУ ДРУГУ В ПОДАРОК! ДЛЯ ЭТОГО ПОСЛЕ КОДА УКАЖИ НОМЕР ТЕЛЕФОНА ДРУГА
НАПРИМЕР:
767250 +7910XXXXXXX

ОТПРАВЬ SMS PLAY НА 4042, УЧАСТВУЙ В ПИКТОРИНЕ И ВЫИГРАЙ ДОБЫЛЬНЫЙ ТЕЛЕФОН ВИДЕОКАМЕРУ ЦИФРОВОЙ ФОТОАППАРАТ
подробности на jmi.ru